

## 9. Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie.

(Wiedemanns Ann. 36. p. 1. 1888.)

Die Ergebnisse der Versuche, welche ich über schnelle elektrische Schwingungen angestellt habe, scheinen mir der Maxwell'schen Theorie ein Uebergewicht über die anderen Theorien der Elektrodynamik zu verleihen. Gleichwohl habe ich der ersten Deutung jener Versuche ältere Anschauungen zu Grunde gelegt, indem ich die Erscheinungen zum Theil zu erklären suchte aus dem Zusammentreffen der elektrostatischen und der elektrodynamischen Kraft. Der Maxwell'schen Theorie in reiner Entwicklung ist ein derartiger Unterschied fremd. Ich wünsche deshalb gegenwärtig zu zeigen, dass auch auf Grund der Maxwell'schen Theorie die Erscheinungen gedeutet werden können, ohne jene Trennung einzuführen. Gelingt dieser Versuch, so ist damit die Frage nach der besonderen Ausbreitung der elektrostatischen Kraft als bedeutungslos in Maxwell's Theorie von selbst erledigt.

Auch abgesehen von dem besonderen Zwecke ist ein näherer Einblick in das Spiel der Kräfte um eine geradlinige Schwingung nicht ohne Interesse.

### Die Formeln.

Wir haben es im Folgenden fast allein mit den Kräften im freien Aether zu thun. Es seien also in demselben  $X, Y, Z$  die Componenten der elektrischen Kraft nach den Coordinaten der  $x, y, z$ ,<sup>1)</sup> es seien  $L, M, N$  die entsprechenden Componenten der

<sup>1)</sup> Denken wir uns im Nullpunkt des Coordinatensystems auf der  $xy$  Ebene stehend. Geht alsdann die Richtung der positiven  $x$  von uns aus

magnetischen Kraft, beide Kräfte gemessen in Gauss'schem Maasse,<sup>1)</sup> es messe  $t$  die Zeit und  $A$  sei die reciproke Lichtgeschwindigkeit. Dann ist nach Maxwell die zeitliche Aenderung der Kräfte von ihrer räumlichen Vertheilung abhängig nach folgenden Gleichungen:

$$(1) \begin{cases} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Von Anfang an soll sein, und zu jeder Zeit muss daher sein:

$$(3) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Die in einem Raumtheil  $\tau$  des Aethers enthaltene elektrische Energie ist gleich  $1/8\pi \cdot \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau$ , die magnetische Energie gleich  $1/8\pi \cdot \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau$ , die Integrale über den Raum  $\tau$  erstreckt. Die Gesamtenergie ist die Summe dieser beiden Theilenergien.

Diese Aussagen bilden, was den Aether anlangt, den wesentlichen Bestandtheil der Maxwell'schen Theorie. Maxwell gelangte zu denselben, indem er von Fernkräften ausging und dem Aether die Eigenschaften eines in hohem Grade dielektrisch polarisirbaren Mittels beilegte. Man kann auch auf anderen Wegen zu denselben gelangen. Auf keinem Wege kann indessen bislang ein directer Beweis für jene Gleichungen aus der Erfahrung erbracht werden. Es erscheint deshalb am folgerichtigsten, dieselben unabhängig von dem Wege, auf welchem man zu ihnen gelangt ist, als eine hypothetische Annahme zu betrachten und ihre Wahrscheinlichkeit auf der sehr grossen Zahl an Gesetzmässigkeiten beruhen zu lassen, welche sie zusammenfassen. Stellt man sich auf diesen Standpunkt, so kann man eine Reihe von Hilfsbegriffen entbehren, welche das Verständniss der Max-

nach vorn, der positiven  $z$  nach oben, so möge die Richtung der positiven  $y$  nach rechts gehen. Ohne diese Festsetzung würde das Vorzeichen der elektrischen und magnetischen Kräfte in den folgenden Gleichungen nicht die conventionelle Bedeutung erhalten.

<sup>1)</sup> H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 48. 1882.

well'schen Theorie erschweren, zum Theil aus keinem anderen Grunde, als weil sie in der That keine Bedeutung besitzen,<sup>1)</sup> sobald man endgültig die Vorstellung unvermittelter Fernkräfte ausschliesst.

Durch Multiplikation der Gleichungen (1) mit  $L, M, N$ , der Gleichungen (2) mit  $X, Y, Z$ , Addition sämtlicher Gleichungen und Integration über einen Raum, dessen Raumelement  $d\tau$ , und dessen Oberflächenelement  $d\omega$  ist, folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau + \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \left\{ (N Y - M Z) \cos n, x + (L Z - N X) \cos n, y \right. \\ & \quad \left. + (M X - L Y) \cos n, z \right\} d\omega, \end{aligned}$$

worin  $n, x, n, y, n, z$  die Winkel bezeichnen, welche die Normale von  $d\omega$  mit den Axen bildet.

Die Gleichung zeigt, dass man den Betrag, um welchen die Energie des Raumes zugenommen hat, betrachten kann als eingetreten durch die Oberflächenelemente. Der durch jedes einzelne Oberflächenelement eintretende Betrag ist gleich dem Product aus den in die Oberfläche fallenden Componenten der elektrischen und der magnetischen Kraft, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, welchen sie miteinander bilden, und dividirt durch  $4\pi A$ . Auf dieses Resultat hat bekanntlich Hr. Poynting<sup>2)</sup> eine höchst bemerkenswerthe Theorie über die Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde gegründet.

Hinsichtlich der Lösung der Gleichungen beschränken wir uns auf den besonderen, aber wichtigen Fall, dass die Vertheilung der elektrischen Kraft symmetrisch um die  $x$ -Axe ist, und zwar derart, dass diese Kraft in jedem Punkte in die durch die  $x$ -Axe gelegte Meridianebene fällt und nur abhängig ist von der  $x$ -Coordinate des Punktes und seinem Abstand  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$  von der  $x$ -Axe. Wir bezeichnen die Componente der elektrischen Kraft in der Richtung von  $\varrho$ , nämlich  $Xx/\varrho + Yy/\varrho$  mit  $R$ , ferner die Componente der magnetischen Kraft, welche auf der Meridianebene senkrecht steht, nämlich  $Ly/\varrho - Mx/\varrho$  mit  $P$ .

<sup>1)</sup> Als Beispiel erwähne ich den Begriff einer Dielektricitätsconstanten des Aethers.

<sup>2)</sup> J. H. Poynting, Phil. Trans. 1894. II. p. 343.

Wir behaupten alsdann: Ist  $\Pi$  eine übrigens beliebige Function von  $q, x, t$ , welche der Gleichung:

$$A^2 d^2 \Pi / dt^2 = \Delta \Pi$$

genügt, und setzen wir  $Q = q d \Pi / dq$ , so bezeichnet das System:

$$\begin{aligned} q Z &= dQ/dq, & q P &= A dQ/dt, \\ q R &= -dQ/dx, & N &= 0 \end{aligned}$$

eine mögliche Lösung unserer Gleichungen.

Um die Behauptung zu beweisen, beachten wir, dass wir haben:

$$\begin{aligned} X &= R \frac{dq}{dx} = -\frac{d^2 \Pi}{dx ds}, & L &= P \frac{dq}{dy} = A \frac{d^2 \Pi}{dy dt}, \\ Y &= R \frac{dq}{dy} = -\frac{d^2 \Pi}{dy ds}, & M &= -P \frac{dq}{dx} = -A \frac{d^2 \Pi}{dx dt}, \\ Z &= \frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left( q \frac{d \Pi}{dq} \right) = \frac{d^2 \Pi}{dx^2} + \frac{d^2 \Pi}{dy^2}, & N &= 0. \end{aligned}$$

Man hat nur nöthig, diese Ausdrücke in die Gleichungen (1), (2), (3) einzusetzen, um die Gleichungen (2) und (3) identisch, die Gleichungen (1) aber unter Berücksichtigung der Differentialgleichung von  $\Pi$  erfüllt zu finden.

Es sei erwähnt, dass auch umgekehrt, von gewissen praktisch bedeutungslosen Beschränkungen abgesehen, sich jede mögliche Vertheilung der elektrischen Kraft, welche symmetrisch um die  $x$ -Axe ist, in obiger Form darstellen lässt, doch ist es für das Folgende nicht nöthig, auf diese Behauptung einzugehen.

Von Wichtigkeit ist uns die Function  $Q$ . Die Linien nämlich, in welchen die Rotationsflächen  $Q = \text{constans}$  ihre Meridianebenen schneiden, sind die elektrischen Kraftlinien; die Construction derselben für eine Meridianebene vermag in jedem Augenblicke ein anschauliches Bild der Kraftvertheilung zu liefern. Schneiden wir den schalenförmigen Raum, welcher zwischen der Fläche  $Q$  und der Fläche  $Q + dQ$  liegt, an verschiedenen Stellen durch Rotationsflächen um die  $x$ -Axe, so ist für alle solche Querschnitte das Product aus elektrischer Kraft und Querschnitt, welches Maxwell die Induction durch den Querschnitt nennt, das gleiche. Legen wir das System der Flächen  $Q = \text{constans}$  so, dass von der einen zur anderen  $Q$  um den gleichen Betrag  $dQ$  wächst, so gilt die gemachte Aussage auch, wenn wir die Querschnitte der verschiedenen entstehenden Räume untereinander vergleichen.

In der ebenen Figur, welche durch den Schnitt der Meridianebenen mit den äquidistanten Flächen  $Q = \text{constans}$  entsteht, ist die elektrische Kraft dem senkrechten Abstand zweier Linien  $Q = \text{constans}$  nur dann umgekehrt proportional, wenn die verglichenen Punkte in gleichem Abstände von der  $x$ -Axe liegen; allgemein gilt die Regel, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Product aus jenem Abstand und der Coordinate  $q$  des betrachteten Punktes.

Neben  $q$  und  $x$  führen wir in der Folge noch Polarcoordinaten  $r$  und  $\theta$  ein, welche mit jenen verknüpft sind durch die Gleichungen  $q = r \sin \theta$ ,  $x = r \cos \theta$ . Es bezeichnet alsdann  $r$  den Abstand vom Nullpunkt unseres Coordinatensystems.

Die Kräfte um eine geradlinige Schwingung.

Es sei verstanden unter  $E$  eine Elektricitätsmenge, unter  $l$  eine Länge, unter  $m = \pi / \lambda$  eine reciproke Länge und unter  $n = \pi / T$  eine reciproke Zeit. Wir setzen nun:

$$\Pi = El \frac{\sin (mr - nt)}{r}.$$

Dieser Werth genügt der Gleichung  $\Delta^2 \Pi / dt^2 = \Delta \Pi$ , sobald wir festsetzen, dass  $m/n = T/\lambda = A$ ,  $\lambda/T$  also gleich der Lichtgeschwindigkeit sein soll. Und zwar geschieht der angeführten Gleichung Genüge überall, ausser im Nullpunkt des Coordinatensystems.

Um zu erfahren, welche elektrischen Vorgänge in diesem Punkte der durch  $\Pi$  gegebenen Kräftevertheilung entsprechen, untersuchen wir seine nächste Umgebung. Wir setzen daher  $r$  verschwindend gegen  $\lambda$  und vernachlässigen  $mr$  gegen  $nt$ . Es wird alsdann  $\Pi = -El \sin nt / r$ .<sup>1)</sup> Da nun:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{r} \right),$$

so haben wir:

$$X = -d^2 \Pi / dx dx, \quad Y = -d^2 \Pi / dy dx, \quad Z = -d^2 \Pi / dz dz.$$

Die elektrischen Kräfte erscheinen also hier als die Ableitungen eines Potentials:

$$\varphi = \frac{d\Pi}{dz} = -El \sin nt \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{r} \right),$$

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 22 am Schluss des Buches].

und dieses entspricht einem elektrischen Doppelpunkt, dessen Axe in die  $x$ -Axe fällt, und dessen Moment mit der Periode  $T$  zwischen den extremen Werthen  $+El$  und  $-El$  hin und her schwankt. Unsere Kraftvertheilung stellt also die Wirkung einer geradlinigen Schwingung dar, welche die sehr kleine Länge  $l$  hat, und an deren Polen im Maximum die Elektrizitätsmengen  $+E$  und  $-E$  frei werden. Die magnetische Kraft senkrecht auf der Richtung der Schwingung in unmittelbarer Nähe derselben ergibt sich zu:

$$P = A E l n \cos nt \sin \theta / r^2.$$

Entsprechend dem Biot-Savart'schen Gesetz ist dies die Kraft eines in die Richtung der  $x$ -Axe fallenden Stromelementes von der Länge  $l$ , dessen Intensität, magnetisch gemessen, zwischen den extremen Werthen  $+\pi A E / T$  und  $-\pi A E / T$  hin und her schwankt. In der That bedingt die Bewegung der Elektrizitätsmengen  $E$  eine Strömung von solcher Grösse.

Aus  $\Pi$  ergibt sich:

$$Q = Elm \left\{ \cos (mr - nt) - \frac{\sin (mr - nt)}{mr} \right\} \sin^2 \theta,$$

und hieraus folgen durch Differentiation die Kräfte  $Z, R, P$ . Im allgemeinen fallen nun allerdings die Formeln zu verwickelt aus, als dass es möglich wäre, aus denselben unmittelbar einen Ueberblick über die Vertheilung der Kräfte zu gewinnen. Für einige Specialfälle sind indess die Resultate verhältnissmässig einfach; wir heben dieselben hervor:

1) Die unmittelbare Nachbarschaft der Schwingung haben wir bereits behandelt.

2) In der  $x$ -Axe, also in Richtung der Schwingung haben wir  $d\theta = r d\theta$ ,  $dz = dr$ ,  $\theta = 0$ , also wird hier:

$$R = 0, \quad P = 0,$$

$$Z = 2 Elm / r^2 \left\{ \cos (mr - nt) - \frac{\sin (mr - nt)}{mr} \right\}.$$

Die elektrische Kraft fällt stets in die Richtung der Schwingung, sie nimmt in kleinen Entfernungen ab wie die dritte Potenz, in grösseren Entfernungen wie das Quadrat des umgekehrten Abstandes.

3) In der  $xy$ -Ebene, also für  $z = 0$ , haben wir  $dz = -r d\theta$ ,  $d\theta = dr$ ,  $\theta = 90^\circ$ , also wird:

$$P = \frac{A E l m n}{r} \left\{ \sin (mr - nt) + \frac{\cos (mr - nt)}{mr} \right\},$$

$$R = 0,$$

$$Z = \frac{E l m^2}{r} \left\{ -\sin (mr - nt) - \frac{\cos (mr - nt)}{mr} + \frac{\sin (mr - nt)}{m^2 r^2} \right\}.$$

Die elektrische Kraft ist in der durch die Schwingung gelegten Aequatorialebene parallel der Schwingung, ihre Amplitude ist gleich  $E l / r^2 \sqrt{1 - m^2 r^2 + m^4 r^4}$ . Die Kraft nimmt bei Entfernung von der Schwingung beständig ab, anfangs schnell wie die dritte Potenz des reciproken Abstandes, später nur sehr langsam, nämlich umgekehrt proportional dem Abstand selbst. In grösseren Entfernungen wird die Wirkung der Schwingung nur in der Aequatorialebene, nicht in der Axe derselben bemerkbar sein.

4) In sehr grossen Entfernungen können wir höhere Potenzen von  $1/r$  gegen niedrige vernachlässigen. Wir haben daher in solchen Entfernungen:

$$Q = E l m \cos (mr - nt) \sin^2 \theta,$$

woraus man ableitet:

$$P = A \cdot E l m n \sin (mr - nt) \sin \theta / r,$$

$$Z = -E l m^2 \sin (mr - nt) \sin^2 \theta / r,$$

$$R = E l m^2 \sin (mr - nt) \sin \theta \cos \theta / r.$$

Daraus folgt:  $Z \cos \theta + R \sin \theta = 0$ . Die Richtung der Kraft steht also in grossen Entfernungen überall senkrecht auf der Richtung vom Ausgangspunkt der Kraft, die Ausbreitung erfolgt hier als reine Transversalwelle. Die Grösse der Kraft ist gleich  $E l m^2 \sin (mr - nt) \sin \theta / r$ , dieselbe nimmt bei constanter Entfernung vom Nullpunkte gegen die Axe hin ab, wie der Abstand von der letzteren.

Um nun auch für die übrigen Theile des Raumes die Vertheilung der Kraft zu erkennen, bedienen wir uns der graphischen Darstellung, indem wir für bestimmte Zeiten die Linien der elektrischen Kraft, nämlich die Curven  $Q = \text{constans}$  für gleich-abstehende Werthe von  $Q$  ziehen. Da  $Q$  sich darstellt als das Product zweier Factoren, von denen der eine nur von  $r$ , der andere nur von  $\theta$  abhängt, bietet die Construction dieser Curven keine grossen Schwierigkeiten. Wir zerlegen jeden Werth von  $Q$ ,

für welchen wir die Curve zeichnen wollen, auf verschiedene Weisen in zwei Factoren, bestimmen den Winkel  $\theta$ , für welchen  $\sin \theta$  gleich dem einen Factor wird, und mittelst einer Hülfscurve denjenigen Werth von  $r$ , für welchen die in  $Q$  enthaltene Function von  $r$  dem anderen Factor gleich wird, wir finden so beliebig viele Punkte der Curve. Versucht man, die Construction auszuführen, so nimmt man noch manche kleine Vortheile wahr, deren Aufführung hier zu weitläufig sein würde. Begnügen wir uns, in den Figuren 27–30 das Resultat einer solchen Construction zu betrachten. Diese Figuren stellen die Kraftvertheilung dar zu den Zeiten  $t = 0, \frac{1}{4} T, \frac{1}{2} T, \frac{3}{4} T$ , aber bei passender Umkehr der Pfeile auch für alle weiteren Zeiten, welche ganzzahlige Vielfache von  $\frac{1}{4} T$  sind. Im Nullpunkt ist in richtiger Lage und ungefähr richtigem Grössenverhältniss die Vorrichtung angedeutet, durch welche in unseren früheren Versuchen die Schwingungen erregt wurden. Die Kraftlinien sind allerdings nicht völlig bis zu diesem Bilde fortgeführt, da ja unsere Formeln die Schwingung als unendlich kurz annehmen, daher in der Nachbarschaft der endlichen Schwingung unzulänglich werden.

Beginnen wir eine Erläuterung der Figuren mit Fig. 27. Hier ist  $t = 0$ , die Strömung ist im Zustande ihrer stärksten Entwicklung, aber die Pole der geradlinigen Schwingung sind nicht elektrisch geladen, es führen keine Kraftlinien auf dieselben zu. Solche Kraftlinien beginnen nun aber von der Zeit  $t = 0$  an aus den Polen hervorzuschliessen, sie sind eingeschlossen in eine Kugel, welche einem Werth  $Q = 0$  entspricht. In Fig. 27 ist diese Kugel allerdings noch verschwindend klein, aber sie vergrössert sich schnell und erfüllt zur Zeit  $t = \frac{1}{4} T$  (Fig. 28) schon den Raum  $R_1$ . Die Vertheilung der Kraftlinien im Innern der Kugel ist nahezu der Art, wie sie einer ruhenden elektrischen Ladung der Pole entspricht. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Kugelfläche  $Q = 0$  vom Nullpunkt entfernt, ist zunächst weit grösser als  $1/A$ , in der That würde der letzteren Geschwindigkeit während der Zeit  $\frac{1}{4} T$  nur der in der Figur angegebene Werth von  $\frac{1}{4} l$  entsprechen. In verschwindendem Abstand vom Nullpunkt ist die Geschwindigkeit der Ausbreitung sogar unendlich. Diese Erscheinung ist es, welche wir in der alten Ausdrucksweise durch die Aussage darstellten, dass sich der mit der Geschwindigkeit  $1/A$  fortschreitenden

Inductionswirkung eine mit unendlicher Geschwindigkeit fortschreitende elektrostatische Kraft superponire. Richtiger deuten wir wohl im Sinne unserer Theorie die Erscheinung, indem wir bemerken, dass im Grunde die sich bildende Welle nicht lediglich den Vorgängen im Nullpunkt ihre Entstehung verdankt, sondern aus den Zuständen des ganzen umgebenden Raumes hervorgeht, welcher letzterer nach unserer Theorie der eigentliche Sitz der Energie ist. Wie dem auch sei, die Fläche  $Q = 0$  breitet sich weiter mit einer Geschwindigkeit aus, welche mehr und mehr auf  $1/\lambda$  herabsinkt, und erfüllt zur Zeit  $t = \frac{1}{2} T$  (Fig. 29) den Raum  $R_4$ . Nunmehr ist die elektrostatische Ladung der Pole in ihrer grössten Entwicklung, die Zahl der Kraftlinien, welche auf die Pole zuführen, erreicht ihren Maximalwerth. Bei weiterem Fortschreiten der Zeit treten keine weiteren Kraftlinien aus den Polen hervor, vielmehr beginnen die vorhandenen sich wieder in den schwingenden Leiter zurückzuziehen, um dort als elektrische Kraftlinien zu verschwinden, ihre Energie aber in magnetische Energie umzuwandeln. Hierbei tritt ein eigenenthümliches Verhalten ein, welches aus Fig. 30 ( $t = \frac{3}{4} T$ ), wenigstens in seinen Anfängen deutlich zu erkennen ist. Die Kraftlinien nämlich, welche sich am meisten vom Nullpunkt entfernt haben, erhalten bei dem Bestreben, sich zusammenzuziehen, eine seitliche Einbiegung, und indem diese Einbiegung sich mehr und mehr gegen die  $x$ -Axe zusammenzieht, schnürt sich von jeder der äusseren Kraftlinien eine in sich geschlossene Kraftlinie ab, welche selbstständig in den Raum fortschreitet, während der Rest der Kraftlinien in den schwingenden Leiter zurücksinkt.

Die Zahl der zurückkehrenden Kraftlinien ist also ebenso gross, wie die Zahl der ausgegangenen, ihre Energie aber ist nothwendig um die Energie der abgeschnürten Theile vermindert. Dieser Energieverlust entspricht der Strahlung in den Raum. Infolge desselben müsste die Schwingung bald zur Ruhe kommen, wenn nicht fremde Kräfte im Nullpunkte die verlorene Energie ersetzen. Indem wir die Schwingung als ungedämpft einführen, haben wir das Vorhandensein solcher Kräfte stillschweigend unterstellt. In Fig. 27, zu welcher wir nunmehr zur Zeit  $t = T$  zurückkehren, indem wir uns die Pfeile umgekehrt denken, erfüllen die abgeschnürten Theile der Kraftlinien den Kugelraum  $R_4$ , während die von den Polen ausgehenden Kraftlinien



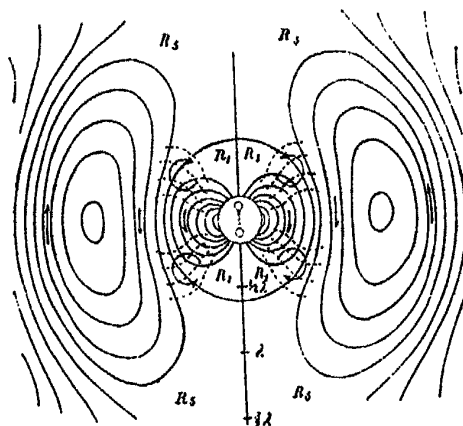


Fig. 28.

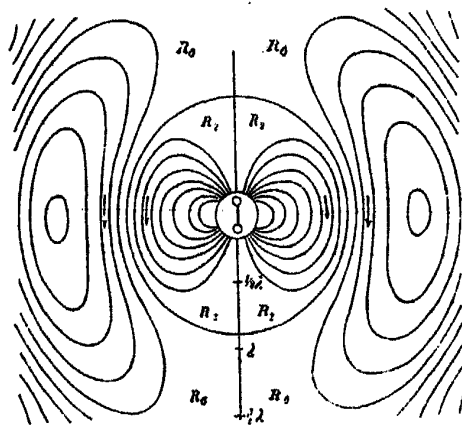


Fig. 29.

vollständig verschwunden sind. Aber neue Kraftlinien brechen aus den Polen hervor und drängen die Kraftlinien, deren Entstehung wir verfolgten, in den Raum  $R_6$  (Fig. 28) zusammen. Es bedarf keiner weiteren Erläuterung, wie nun weiter diese Kraftlinien in den Raum  $R_6$  (Fig. 29),  $R_7$  (Fig. 30),  $R_8$  (Fig. 27) gelangen. Mehr und mehr gehen dieselben in eine reine Transversalwelle über und verlieren sich als solche in der Entfernung. Das beste Bild vom Spiel der Kräfte würde man erhalten, wenn man die Zeichnungen für noch kleinere Zeitabstände herstellte und dieselben auf einer stroboskopischen Scheibe befestigte.

Eine nähere Betrachtung der Figuren ergibt, dass für solche Punkte, welche weder in der  $z$ -Axe noch in der  $xy$ -Ebene liegen, die Richtung der Kraft sich von Augenblick zu Augenblick ändert. Stellen wir daher die Kraft für einen Punkt in üblicher Weise durch eine von dem betrachteten Punkt ausgehende Linie dar, so oscillirt der Endpunkt dieser Linie während der Schwingung nicht etwa in einer Geraden hin und her, sondern beschreibt eine Ellipse. Um zu erfahren, ob es Punkte giebt, für welche diese Ellipse nahezu in einen Kreis übergeht, in welchen also die Kraft ohne wesentliche Aenderung ihrer Grösse die Richtungen der Windrose durchläuft, superponiren wir zwei der Zeichnungen, welche Zeiten entsprechen, die um  $\frac{1}{2}T$  voneinander entfernt sind, z. B. Figur 27 und 29 oder 28 und 30. Für Punkte, wie wir sie suchen, muss offenbar das Liniensystem der einen senkrecht dasjenige der anderen schneiden, und die Abstände der Linien der einen Figur denen der Linien der anderen gleich werden. Die kleinen Vierecke, welche durch den Schnitt der beiden Systeme entstehen, müssen also für die gesuchten Punkte Quadrate werden. Es lassen sich nun in der That Gebiete der gesuchten Art bemerken; dieselben sind in Figur 27 und 28 durch kreisförmige Pfeile angedeutet, deren Richtung zugleich die Drehungsrichtung der Kraft angiebt. Die punktirten Linien sind zur Erläuterung eingetragen, dieselben gehören den Liniensystemen der Figuren 29 und 30 an. Uebrigens findet man, dass die Kraft das hier geschilderte Verhalten nicht allein in den angegebenen Punkten zeigt, vielmehr in dem ganzen streifenförmigen Gebiet, welches von jenen Punkten ausgehend die Nachbarschaft der  $z$ -Axe bildet. Doch nimmt in dieser Richtung die Kraft so schnell an Grösse ab, dass nur in

den hervorgehobenen Punkten ihr eigenthümliches Verhalten auffällig werden kann.

Das beschriebene, von der Theorie geforderte Kraftsystem kann nun einer unvollkommenen und noch nicht durch die Theorie geleiteten Beobachtung ganz wohl sich in der Weise darstellen, welche ich in einer früheren Arbeit geschildert habe.<sup>1)</sup> Zwar lassen jene Beobachtungen bei weitem nicht alle verwickelten Einzelheiten erkennen, aber sie ergeben das Wesentliche der Vertheilung richtig. Nach Beobachtung wie nach Theorie ist die Vertheilung der Kraft in der Nähe der Schwingung ähnlich der elektrostatischen Vertheilung; nach Beobachtung wie nach Theorie breitet sich die Kraft wesentlich in der Aequatorialebene aus und nimmt hier anfangs schnell, dann langsam ab, ohne in einer mittleren Entfernung Null zu werden; nach Beobachtung wie nach Theorie ist die Kraft in der Aequatorialebene, der Axe und in grossen Entfernungen von beständiger Richtung und wechselnder Grösse, während sie in zwischenliegenden Punkten weniger ihre Grösse, als vielmehr ihre Richtung ändert. Nur darin mangelt die Uebereinstimmung zwischen der Theorie und jenen Beobachtungen, dass in grossen Entfernungen nach ersterer die Kraft stets senkrecht auf der Geraden zum Ursprung steht während sie in der letzteren parallel der Schwingung erschien. Für die Nähe der Aequatorialebene, wo die Kräfte am stärksten, kommt dies zwar auf das gleiche hinaus, nicht aber für Richtungen, welche zwischen Aequatorialebene und Axe liegen. Ich glaube, dass der Fehler auf Seiten der Beobachtung ist. In jenen Versuchen war die Richtung der Schwingung parallel den beiden Hauptwänden des Beobachtungsraumes, dadurch konnte die Componente der Kraft, welche parallel der Schwingung war, verstärkt erscheinen gegenüber der zur Schwingung senkrechten Componenten.

Ich habe deshalb die Versuche wiederholt bei verschiedentlich abgeänderter Aufstellung der primären Schwingung und fand bei gewissen Aufstellungen die Ergebnisse mit der Theorie übereinstimmend. Zu einem eindeutigen Resultate gelangte ich indessen nicht, sondern fand, dass bei grossen Abständen und in Gebieten von geringer Intensität der Kraft die Störungen der

<sup>1)</sup> Siehe No. 5. p. 98.

Umgebung in dem zur Verfügung stehenden Raum schon zu beträchtlich waren, um ein sicheres Urtheil zu verstaten.

Während die Schwingung arbeitet, schwankt die Energie durch die Kugelflächen, welche den Nullpunkt umgeben, aus und ein. Durch jede Kugelfläche aber tritt während einer Schwingungsdauer mehr Energie aus, als in die Kugelfläche zurücktritt, und zwar für alle Kugelflächen der gleiche Betrag. Dieser Betrag stellt den während der Schwingungsdauer durch Strahlung erlittenen Energieverlust dar. Wir können ihn leicht berechnen für Kugelflächen, deren Radius  $r$  schon so gross ist, dass wir die vereinfachten Formeln anwenden dürfen. Es wird nämlich während des Zeitelementes  $dt$  durch eine Kugelzone, welche zwischen  $\theta$  und  $\theta + d\theta$  liegt, austreten die Energie:

$$dt \cdot 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \cdot \frac{1}{4\pi A} \cdot (Z \sin \theta - R \cos \theta) P.$$

Setzen wir hierin für  $Z, P, R$  die für grosse  $r$  gültigen Werthe und integrieren nach  $\theta$  von 0 bis  $\pi$  und nach  $t$  von 0 bis  $T$ , so ergibt sich, dass durch die ganze Kugel während jeder halben Schwingung austritt die Energie:

$$\frac{1}{3} E^2 l^3 m^2 n T = \pi^4 E^2 l^3 / 3 \lambda^2.$$

Suchen wir hieraus eine angenäherte Schätzung der Verhältnisse zu gewinnen, welche bei unseren wirklichen Versuchen vorlagen. In denselben luden wir zwei Kugeln von 15 cm Radius in entgegengesetztem Sinne zu einer Schlagweite von etwa 1 cm. Schätzen wir die elektrostatische Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln hiernach zu  $120 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$ , so war jede Kugel auf das Potential  $\pm 60 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$  geladen, und es war also  $E = 15 \times 60 = 900 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$ . Der Gesamtvorrath von Energie, welchen die Schwingung bei ihrem Beginne besass, betrug darnach  $2 \times \frac{1}{2} \times 900 \times 60 = 54\,000 \text{ g cm}^2 \text{sec}^{-2}$ , entsprach daher etwa der Energie, welche ein Grammgewicht nach dem Fall durch 55 cm erreicht hat. Es war weiter die Länge der Schwingung  $l = 100 \text{ cm}$  näherungsweise und die Wellenlänge etwa gleich 480 cm. Daraus ergibt sich der Energieverlust in der halben Schwingungsdauer zu etwa  $2400 \text{ g cm}^2 / \text{sec}^{-2}$ .<sup>1)</sup> Es erhellt, dass schon nach elf halben Schwingungen die Hälfte der Energie auf Strahlung ver-

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 23 am Schluss des Buches].

ausgab sein musste. Die schnelle Dämpfung, welche die Erscheinungen an unseren Schwingungen erkennen liessen, war also schon durch die Strahlung nothwendig bedingt und konnte nicht fehlen, selbst wenn der Widerstand der Leiter und des Funkens zu vernachlässigen gewesen wäre.

Eine Energieabgabe von  $2400 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}$  in 1,5 Hundert-millionteln Secunde entspricht einer Arbeitsleistung von 22 Pferdekraften. Mindestens in dieser Fülle müsste der primären Schwingung Energie zugeführt werden, wollte man trotz der Strahlung die erregten Schwingungen dauernd mit gleicher Intensität erhalten. Während der ersten wenigen Schwingungen entspricht die Intensität der Strahlung in etwa 12 m Abstand vom primären Leiter der Intensität der Sonnenstrahlung auf der festen Erdoberfläche.

#### Die Interferenzversuche.

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Kraft in der Aequatorialebene zu ermitteln, brachten wir die Wirkung derselben zur Interferenz mit der Wirkung einer mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einem Drahte fortschreitenden elektrischen Welle.<sup>1)</sup> Es zeigte sich, dass die auftretenden Interferenzen nicht in gleichem Abstand folgten, sondern sich in der Nähe der Schwingung schneller veränderten, als dies in grösseren Abständen der Fall war. Dies Verhalten wurde durch die Annahme erklärt, dass sich die Gesamtkraft in zwei Theile zerpalten lasse, von welchen der eine, der elektrodynamische, sich mit Lichtgeschwindigkeit, der andere, der elektrostatische, sich mit grösserer, vielleicht unendlicher Geschwindigkeit ausbreite. Nach unserer Theorie ist nun aber die in Frage kommende Kraft in der Aequatorialebene:

$$Z = E l m^2 \left\{ -\frac{\sin(mr - nt)}{mr} - \frac{\cos(mr - nt)}{m^2 r^2} + \frac{\sin(mr - nt)}{m^2 r^2} \right\},$$

und dieser Ausdruck zerfällt auf keine Weise in zwei einfache, mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreitende Wellen. Ist also die gegenwärtige Theorie richtig, so kann die frühere Erklärung nur eine Annäherung an die Wahrheit darbieten. Wir

<sup>1)</sup> Siehe No. 7, p. 115.

wollen untersuchen, ob die gegenwärtige Theorie überhaupt zu einer Erklärung der Erscheinungen führt.

Zunächst können wir schreiben  $Z = B \sin(nl - \delta_1)$ , wo die Amplitude der Kraft  $B = El / r^2 \sqrt{1 - m^2 r^2 + m^4 r^4}$  und die Phase  $\delta_1$  der Kraft bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin mr \cdot mr + \cos mr \cdot m^3 r^3 - \sin mr / m^3 r^3}{\cos mr \cdot mr - \sin mr / m^3 r^3 - \cos mr / m^3 r^3}.$$

welche nach Umformung ergibt:

$$\delta_1 = mr - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{mr}{1 - m^2 r^2}.$$

In Fig. 31 ist durch die Curve  $\delta_1$  die Grösse  $\delta_1$  als Function von  $mr$  anschaulich gemacht. Die Länge  $ab$  entspricht dabei in Abscissen und

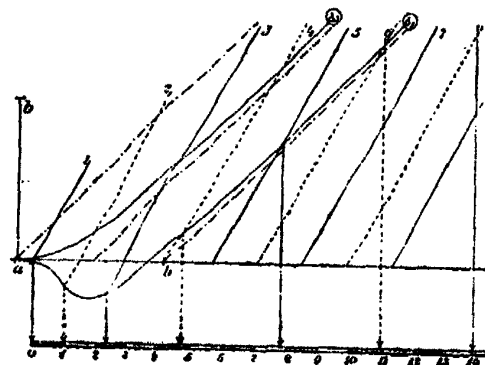


Fig. 31.

Ordinaten dem Werthe  $\pi$ . Betrachtet man nicht  $mr$ , sondern  $r$  als variable Abscisse, so entspricht die Länge  $ab$  in den Abscissen der halben Wellenlänge.

Um unmittelbar an die Versuche anzuknüpfen, welche wir darzustellen wünschen, ist unter der Zeichnung noch eine weitere Theilung der Abscissenaxe nach Metern angebracht. Es ist nämlich nach den Ergebnissen der directen Messung<sup>1)</sup>  $\lambda = 4,8$  m gesetzt und danach die Länge des Meters bestimmt; der Anfangspunkt der Theilung ist aber nicht in die Schwingung, sondern in einen Abstand von 0,45 m von derselben verlegt. Die Eintheilung stellt auf diese Weise die Eintheilung der Grundlinie

<sup>1)</sup> Siehe No 8, p. 133.

dar, in welcher wir die Interferenzen bestimmten. Man ersieht aus der Figur, dass die Phase überhaupt nicht vom Ursprung an wächst, vielmehr ist der Verlauf der Phase ein solcher, als entstünde die Welle in einem Abstand von etwa  $\frac{1}{2}\lambda$  im Raume und liefe von dort theils gegen den Leiter, theils in den Raum hinaus. In grossen Entfernungen ist die Phase um den Werth  $\pi$  kleiner, als sie sein würde, wenn die Welle mit constanter Geschwindigkeit vom Ursprung ausgegangen wäre; die Welle verhält sich also in grossen Entfernungen so, als hätte sie die erste halbe Wellenlänge mit unendlicher Geschwindigkeit durchlaufen.

Die Wirkung  $w$  der Drahtwellen auf eine bestimmte Stellung des secundären Leiters kann nun jedenfalls dargestellt werden in der Form:  $w = C \sin(\mu t - \delta_2)$ , worin als Abkürzung  $\delta_2 = m, r + \delta = \pi r / \lambda_1 + \delta$  gesetzt ist.  $\lambda_1$  bezeichnet die halbe Wellenlänge der Drahtwellen, in unseren Versuchen 2,8 m,  $\delta$  aber die Phase ihrer Wirkung im Punkte  $r=0$ , welche wir durch Vorschaltung von Drahtlängen willkürlich abänderten. Ebenso konnten wir die Amplitude  $C$  abändern und gaben ihr solche Grösse, dass die Wirkung der Drahtwellen der directen Wirkung nahezu gleich war. Die Phase der Interferenz hängt dann nur ab von dem Unterschied der Phasen  $\delta_1$  und  $\delta_2$ . Bei derjenigen Stellung des secundären Kreises, auf welche sich unser Ausdruck für  $w$  bezieht, verstärken sich beide Wirkungen (die Interferenz hat das Zeichen +), wenn  $\delta_1 - \delta_2$  gleich Null oder einem ganzen Vielfachen von  $2\pi$  ist; die Wirkungen vernichten sich (die Interferenz hat das Zeichen -), wenn  $\delta_1 - \delta_2$  gleich  $\pi$  oder einem ganzen Vielfachen dieses Werthes ist; eine Interferenz findet nicht statt (die Interferenz hat das Zeichen 0), wenn  $\delta_1 - \delta_2$  gleich einem ganzen Vielfachen von  $\frac{1}{2}\pi$  ist.

Wir wollen uns nun  $\delta$  so bestimmt denken, dass im Anfangspunkt der Metertheilung die Phase der Interferenz einen bestimmten Werth  $\varepsilon$  habe, dass daselbst also  $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon$  sei. Die gerade Linie 1 unserer Figur soll uns alsdann den Werth von  $\delta_2 + \varepsilon$  als Function der Entfernung darstellen. Die Linie ist nämlich mit solcher Neigung gezogen, dass für ein Wachsthum der Abscisse um  $\lambda_1 = 2,8$  m die Ordinate um den Werth  $\pi$  wächst, und sie ist so gelegt, dass sie die Curve  $\delta_1$  schneidet in einem Punkte, dessen Abscisse die des Anfangspunktes der

Metertheilung ist. Die Linien 2, 3, 4 etc. stellen dann weiter den Verlauf der Werthe von  $\delta_2 + \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon - \pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon - \frac{3}{2}\pi$  etc. vor. Diese Linien sind nämlich parallel der Linie 1 und so gezogen, dass sie ein und dieselbe Ordinate in Abständen von je  $\frac{1}{2}\pi$ , ein und dieselbe Abscisse in Abständen von je 1,4 m schneiden. Projicirt man nun die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve  $\delta_1$  auf die Abscissenaxe herunter, so erhält man offenbar diejenigen Entfernungen, für welche  $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon + \pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon + \frac{3}{2}\pi$  etc. wird, für welche also die Phase der Interferenz gegen die des Ausgangspunktes um  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$  etc. gewachsen ist. Man entnimmt so unmittelbar aus der Figur die Aussagen: Besitzt die Interferenz im Anfangspunkt der Grundlinie das Zeichen + (—), so erlangt sie das Zeichen 0 zum ersten mal bei ca. 1 m, das Zeichen — (+) bei ca. 2,3 m, um wieder das Zeichen 0 zu erreichen bei ca. 4,8 m; die Interferenz kehrt zurück zum Zeichen + (—) bei ca. 7,6 m, sie ist wiederum 0 bei ca. 14 m, um von nun an die Reihe der Zeichen in nahezu gleichen Abständen zu durchlaufen. Besitzt die Interferenz im Nullpunkt der Grundlinie das Zeichen 0, so besitzt sie dies Zeichen ebenfalls bei ca. 2,3 m, 7,6 m, 14 m, sie hat ausgesprochen positiven oder negativen Charakter in ca. 1 m, 4,8 m, 11 m Entfernung vom Nullpunkt. Für mittlere Phasen gelten mittlere Werthe. Man vergleiche mit diesem Ergebniss der Theorie das Ergebniss des Versuches, insbesondere diejenigen Interferenzen, welche stattfanden bei Vorschaltung von 100, 250, 400, 550 cm Draht<sup>1)</sup>, und man wird die Uebereinstimmung so vollkommen finden, als irgend erwartet werden kann.

Nicht ganz so gut ist es mir gelungen, die Interferenzen der zweiten Art wiederzugeben.<sup>2)</sup> Zur Herstellung dieser Interferenzen benutzten wir eine Lage des secundären Kreises, bei welcher hauptsächlich die Integralkraft der Induction um den geschlossenen Kreis in Betracht kam. Sehen wir die Dimensionen des letzteren als verschwindend klein an, so ist die Integralkraft proportional der Aenderungsgeschwindigkeit der magnetischen Kraft, welche senkrecht auf der Ebene des Kreises steht, also proportional dem Ausdruck:

<sup>1)</sup> Siehe p. 127.

<sup>2)</sup> Siehe p. 128.

$$\frac{dP}{dt} = A E l m^2 n^2 \left\{ -\frac{\cos(mr - nt)}{mr} + \frac{\sin(mr - nt)}{m^2 r^2} \right\}.$$

Hieraus erhält man für die Phase  $\delta_3$  dieser Wirkung:

$$\operatorname{tg} \delta_3 = -\frac{\cos mr / mr - \sin mr / m^2 r^2}{\sin mr / mr + \cos mr / m^2 r^2},$$

oder nach Umformung:

$$\delta_3 = mr - \operatorname{arc} \operatorname{tg} mr.$$

Die Linie  $\delta_3$  unserer Figur 31 stellt den Verlauf dieser Function dar. Man ersieht, dass für diese Wirkung die Phase schon vom Ursprung an dauernd wächst. Es müssen daher die Erscheinungen, welche auf eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit hinweisen, bei diesen Interferenzen allerdings schon in der Nähe der Schwingung sich geltend machen. So zeigte es sich auch in den Versuchen, und eben darin bestand der Vortheil, welchen uns diese Art der Interferenzen bot. Aber es ergibt sich die scheinbare Geschwindigkeit in der Nähe der Schwingung doch grösser, als in der Ferne, und es ist nicht zu leugnen, dass die Phase der Interferenz sich nach der Theorie wenig, aber bemerkbar schneller ändern müsste, als es in den Versuchen der Fall war. Es erscheint mir wahrscheinlich, dass eine vollkommenere Theorie, welche nicht die beiden wirkenden Leiter als verschwindend klein betrachtet, vielleicht auch eine andere Annahme des Werthes von  $\lambda$ , hier eine bessere Uebereinstimmung herstellen würde.

Von Wichtigkeit ist, dass auch unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie die Versuche nicht gedeutet werden können, ohne einen merklichen Unterschied zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen in Drähten und der Wellen im freien Raum anzunehmen.

#### Wellen in drahtförmigen Leitern.

$$\text{Die Function: } K(p, \varrho) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} p \varrho (e^u + e^{-u})} du,$$

welche sich für grosse Werthe von  $\varrho$  der Function  $\sqrt{\pi/2 p \varrho} \cdot e^{-p \varrho}$  für verschwindende Werthe von  $\varrho$  der Function  $-\log(p \varrho/2) - 0.577$  anschmiegt, genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 K(pq)}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{dK(pq)}{dq} - p^2 K(pq) = 0.$$

Setzen wir also:

$$II = 2J / An \sin(mx - nt) \cdot K(pq),$$

so genügt  $II$  der Gleichung  $A^2 d^2 II / dt^2 = \Delta II$ , sobald wir machen  $p^2 = m^2 - A^2 n^2$ . Dabei soll verstanden sein unter  $J$  eine in magnetischem Maass gemessene Stromstärke, unter  $p$  und  $m = \pi / \lambda$  reciproke Längen, unter  $n = \pi / T$  eine reciproke Zeit. Die Function  $II$  genügt ihrer Gleichung im ganzen Raum, ausser in der  $x$ -Axe, in welcher sie unstätig wird. Es entsprechen also die aus obigem  $II$  abzuleitenden Werthe von  $R$ ,  $Z$ ,  $P$ ,  $N$  einer elektrischen Bewegung, welche in einem sehr dünnen, längs der  $x$ -Axe ausgespannten Drahte stattfindet. In unmittelbarer Nachbarschaft dieses Drahtes wird bis auf Grössen, welche gerade Potenzen von  $q$  enthalten:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -2J / An \sin(mx - nt), & \text{also:} \\ R_0 &= 2Jm / Anq \cos(mx - nt), \\ P_0 &= 2J / q \cos(mx - nt), \end{aligned}$$

wobei durch den Index 0 der Bezug auf verschwindende  $q$  festgehalten ist. Aus dem Werthe von  $R_0$  folgt, dass die auf der Längeneinheit des Drahtes sich befindende freie Elektricität  $e$  ist:

$$e = 1 / 4\pi \cdot 2\pi q \cdot R_0 = Jm / An \cos(mx - nt).$$

Aehnlich folgt aus  $P_0$  die Stromstärke  $i$ :

$$i = 1 / 4\pi \cdot 2\pi q \cdot P_0 = J \cos(mx - nt).$$

Die Werthe von  $i$  und  $e$  genügen von selber der nothwendig zu erfüllenden Gleichung  $A de / dt = -di / dx$ . Dieselben zeigen uns, dass die behandelte Bewegung eine elektrische Sinuswelle darstellt, welche sich in der  $x$ -Axe in Richtung der wachsenden  $x$  fortpflanzt, deren halbe Wellenlänge  $\lambda$ , und deren halbe Schwingungsperiode  $T$ , deren Geschwindigkeit also  $\lambda / T = n / m$  ist, und welche eine solche Intensität besitzt, dass die grössten auftretenden Stromstärken  $\pm J$  betragen.

Behalten wir uns vor, über fremde Kräfte im Drahte willkürlich zu verfügen, so können wir  $\lambda$  und  $T$  als unabhängig voneinander ansehen. Für jedes bestimmte Verhältniss dieser

Größen, also für jede bestimmte Geschwindigkeit der Welle haben die Linien der elektrischen Kraft eine bestimmte Gestalt, welche, unabhängig von der Zeit, am Drahte entlang gleitet. Wie früher stellen wir diese Gestalt dar, indem wir die Linien  $Q = \text{constans}$  ziehen.

In Figur 32 ist eine solche Darstellung ausgeführt, und zwar zunächst in Fig. 32<sub>a</sub> für den Fall, dass die Geschwindigkeit sehr klein,  $p$  also gleich  $m$  ist. Die Zeichnung entspricht dann einer elektrostatischen Kraftvertheilung, nämlich derjenigen, welche wir erhalten, wenn wir auf dem Draht Elektrizität so vertheilen, dass die Dichtigkeit eine Sinusfunction der Drahtlänge ist. Figur 32<sub>b</sub> giebt die Kraftlinien für eine Geschwindigkeit, welche etwa  $28/48$  der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Man sieht, dass die Kraftlinien einen grösseren Umweg als vorher machen, um, von dem Drahte ausgehend, zu demselben zurückzugelangen. In der älteren Anschauungsweise ist dies erläutert durch die Aussage: Die elektrodynamische Kraft, welche

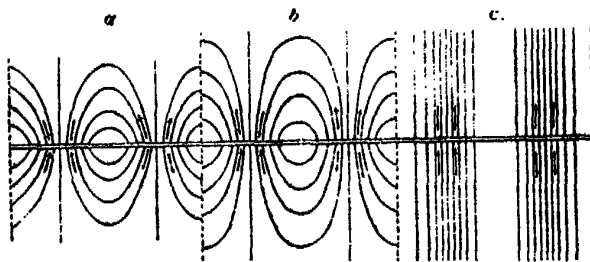


Fig. 32.

parallel dem Drahte gerichtet sei, schwäche die gleichgerichtete Componente der elektrostatischen Kraft, während sie die zum Drahte senkrechte Componente nicht beeinflusse. Die Schwächung der dem Draht parallelen Componente kann bis zur Vernichtung derselben sich steigern. Nehmen wir nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen gleich der Lichtgeschwindigkeit, so wird  $p = 0$ , es artet dann für jeden Werth von  $q$   $K(p, q)$  aus in  $-\log q + \text{constans}$ , und es wird für jeden Werth von  $q$ :

$$Q = -2J / An \cdot \sin (m x - n t),$$

also:

$$R = 2 J m / A n q \cdot \cos(m x - n t), \quad Z = 0, \\ P = 2 J / q \cos(m x - n t), \quad N = 0.$$

Die Kraftvertheilung ist alsdann die denkbar einfachste die elektrische Kraft steht überall senkrecht auf dem Drahte und nimmt ab im umgekehrten Verhältniss der Entfernung von diesem. Die für gleichabstehende Werthe von  $Q$  gezogenen Linien  $Q = \text{constans}$  sind in Figur 32, angedeutet. Für Wellen, welche sich mit einer grösseren Geschwindigkeit als  $1/A$  fortpflanzen, wird  $p$  imaginär. Für diesen Fall müssen wir unsere Formeln umgestalten, doch gehen wir nicht auf denselben ein, da ihm keine praktische Bedeutung zukommt.

An der Oberfläche eines Leiters setzt sich diejenige Componente der elektrischen Kraft, welche tangential zur Oberfläche liegt, stetig in das Innere des Leiters fort. Unter einem vollkommenen Leiter versteht man nach Maxwell einen solchen, in dessen Inneren stets nur verschwindend kleine Kräfte auftreten können. Daraus folgt für die Oberfläche eines vollkommenen Leiters als Bedingung, dass die zur Oberfläche tangentielle Componente der Kraft verschwinden muss. Enthält diese Behauptung keinen Irrthum, so folgt, dass sich in gut leitenden Drähten elektrische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit und in derjenigen Gestalt ausbreiten müssen, welche durch Figur 32, gegeben ist. Denn nur für diese Kraftvertheilung steht die Kraft überall senkrecht auf der Oberfläche des Drahtes. In der That ist denn auch stets aus der Maxwell'schen Theorie, wie aus den älteren Theorien, der Schluss gezogen worden, dass sich durch vollkommen leitende Drähte elektrische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Dürfen wir indessen unseren Versuchen nur ein wenig trauen, so ist dies Resultat unrichtig, die Ausbreitung geschieht mit einer viel geringeren Geschwindigkeit und etwa in derjenigen Gestalt, welche Fig. 32, anzeigt. Dies Ergebniss ist um so auffallender, als die Geschwindigkeit in Drähten ebenfalls eine von der Natur des Drahtes gänzlich unabhängige Geschwindigkeit zu sein scheint. Ich habe dieselbe als gleich gefunden in Drähten der verschiedensten Metalle, der verschiedensten Dicke, der verschiedensten Gestalt des Querschnittes, auch in Säulen leitender Flüssigkeit. Die Ursachen, welche

diese Geschwindigkeit bestimmen, sind noch dunkel. Der Widerstand spielt jedenfalls keine Rolle. Ich vermuthete eine Zeit lang, dass sich ein Einfluss der Constanten  $k$  geltend mache, durch deren Einführung Hr. H. v. Helmholtz die Maxwell'sche Theorie erweitert hat.<sup>1)</sup> Eine nähere Ueberlegung lässt diese Vermuthung indessen zurückweisen. Wäre die Grenzbedingung nur richtig, so wäre eine Welle von der Form der Fig. 32, immer noch möglich. Dieselbe würde stets eine reine Transversalwelle sein und müsste sich als solche mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, wie ebene Transversalwellen im Raume, ob nun gleichzeitig Longitudinalwellen möglich sind oder nicht. Ein endlicher Werth der Constanten  $k$  würde, ohne die Verschiedenheit der beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären, fordern, dass zweierlei Arten von Wellen verschiedener Geschwindigkeit im Draht möglich seien, wofür bisher Andeutungen aus der Erfahrung noch nicht vorliegen. Es dürfte die Richtigkeit der Grenzbedingung für schnell veränderliche Kräfte zu bezweifeln sein.

Erscheint es einerseits nicht möglich, den in der  $x$ -Axe fortschreitenden Wellen eine beliebig grosse Geschwindigkeit zu ertheilen, so hat es auf der anderen Seite keine Schwierigkeit, die Geschwindigkeit von ihrem Maximalwerth beliebig herabzudrücken und Kraftvertheilungen herzustellen, welche zwischen den Formen 32<sub>1</sub> und 32<sub>2</sub> eingeschlossen sind. Man lässt zu dem Ende die Welle durch regelmässig gezackte oder spiralförmig aufgerollte Drähte fortschreiten. Indem ich z. B. einen Draht von 40 m Länge zu einer einfachen Spirale von 1 cm Durchmesser in solcher Dichte aufrollte, dass die Länge der Spirale 1,6 m wurde, konnte ich Knotenpunkte in Abständen von ca. 0,31 m beobachten, während im gestreckten Draht die Abstände der Knoten 2,8 m betrugen. Bei allmählichem Ausrecken der Spirale ging der eine Werth auf den anderen über. In der Richtung der  $x$ -Axe (der Axe der Spirale) gemessen, bewegt sich also die Welle wesentlich langsamer in dem aufgerollten Drahte. In der Drahtlänge gemessen allerdings bewegt sie sich schneller. Aehnlich ist das Verhalten in gezackten Drähten. Irre ich nicht, so vermag auch hiervon die Max-

<sup>1)</sup> H. v. Helmholtz, Ges. Abh. 1. p. 545.

well'sche Theorie unter Annahme jener Grenzbedingung für gute Leiter keine Rechenschaft zu geben. Es müsste nach dieser Theorie, wie mir scheint, die in der  $x$ -Axe gemessene Ausbreitung durch jede Form des Leiters mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen, sobald nur erstens der Widerstand des Leiters nicht in Betracht kommt und zweitens die Dimensionen des Leiters senkrecht zur Axe verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind. Beide Bedingungen aber sind in spiraligen Metalldrähten erfüllt, ohne dass die Folgerung zuträfe.

Indem wir versuchten, die Beobachtungen aus der Maxwell'schen Theorie zu erklären, ist es uns nicht gelungen, alle Schwierigkeiten zu beseitigen. Gleichwohl wird man die Vollständigkeit, mit welcher jene Theorie den grössten Theil der Erscheinungen wiedergibt, als eine nicht verächtliche Leistung derselben betrachten dürfen. Denn wenn man versucht, auf die Erscheinungen eine der älteren Theorien anzuwenden, so geräth man schon in den elementarsten Zügen auf Widersprüche, es sei denn, dass man durch Einführung des Aethers als Dielektricum jene Theorien mit der Maxwell'schen versöhnt auf dem durch v. Helmholtz angegebenen Wege.

## 10. Ueber die Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

(Wiedemann's Ann. 37. p. 395. 1889.)

Fliesst ein unveränderlicher elektrischer Strom in einem cylindrischen Drahte, so erfüllt er jeden Theil des Querschnittes mit gleicher Stärke. Ist aber der Strom veränderlich, so bewirkt die Selbstinduction eine Abweichung von dieser einfachsten Vertheilung. Denn da die mittleren Theile des Drahtes von allen übrigen im Mittel weniger entfernt sind, als die Theile des Randes, so stellt sich die Induction den Veränderungen des Stromes in der Mitte des Drahtes stärker entgegen als am Rande, und infolge hiervon wird die Strömung die Randgebiete bevorzugen. Wenn der Strom seine Richtung einige hundert Mal in der Secunde wechselt, kann die Abweichung von der normalen Vertheilung schon nicht mehr unmerklich sein; diese Abweichung wächst schnell mit der Zahl der Stromwechsel, und wenn gar die Strömung ihre Richtung viele Millionen Mal in der Secunde wechselt, so muss nach der Theorie fast das ganze Innere des Drahtes stromfrei erscheinen und die Strömung sich auf die nächste Umgebung der Grenze beschränken. In solchen äussersten Fällen ist nun offenbar die vorgetragene Auffassung des Vorgangs nicht ohne physikalische Schwierigkeiten und es treten die Vorzüge einer anderen Auffassung der Sache hervor, welche wohl zuerst von den Herren O. Heaviside<sup>1)</sup> und J. H. Poynting<sup>2)</sup> als die richtige Interpretation

<sup>1)</sup> O. Heaviside, Electrician, Januar 1886; Phil. Mag. 25. p. 153. 1888.

<sup>2)</sup> J. H. Poynting, Phil. Trans. 2. p. 277. 1885.

der auf diesen Fall angewendeten Maxwell'schen Gleichungen gegeben worden ist. Nach dieser Auffassung pflanzt sich die elektrische Kraft, welche den Strom bedingt, überhaupt nicht in dem Drahte selber fort, sondern tritt unter allen Umständen von aussen her in den Draht ein und breitet sich in dem Metall verhältnissmässig langsam und nach ähnlichen Gesetzen aus, wie Temperaturänderungen in einem wärmeleitenden Körper. Es wird also, wenn die Kräfte in der Umgebung des Drahtes die Richtung beständig ändern, die Wirkung dieser Kräfte sich nur auf eine sehr kleine Tiefe in das Metall hinein erstrecken; je langsamer die Schwankungen werden, desto tiefer wird die Wirkung eindringen, und wenn endlich die Aenderungen unendlich langsam erfolgen, hat die Kraft Zeit, das ganze Innere des Drahtes mit gleichmässiger Stärke zu füllen.<sup>1)</sup>

Wie wir nun auch immer das Ergebniss der Theorie auffassen wollen, eine wichtige Frage ist, ob es mit der Wirklichkeit übereinstimme. Da ich in den Versuchen, welche ich über die Ausbreitung der elektrischen Kraft anstellte, elektrische Wellen in Drähten benutzte, welche von ausserordentlich kurzer Periode waren, so lag es nahe, an diesen die Richtigkeit der gezogenen Folgerungen zu prüfen. In der That fand sich die Theorie bestätigt durch die Versuche, welche jetzt beschrieben werden sollen, und man wird finden, dass diese wenigen Versuche genügen, um die Auffassung der Herren Heaviside und Poynting im höchsten Grade nahezu legen. Verwandte Versuche mit verwandten Ergebnissen, aber mit ganz anderen Hilfsmitteln, sind schon von Hrn. O. J. Lodge<sup>2)</sup> angestellt worden, hauptsächlich im Interesse der Theorie der Blitzableiter. Bis zu welchem Punkt die Folgerungen zutreffend sind, welche von Hrn. Lodge in dieser Richtung aus seinen Versuchen gezogen wurden, dürfte in erster Reihe von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher im Blitze thatsächlich die Aenderungen der elektrischen Zustände erfolgen.

Die Apparate und Methoden, welche hier erwähnt werden, sind dieselben, welche ich in den früheren Arbeiten ausführlich

<sup>1)</sup> (Siehe Anmerkung 24 am Schluss des Buches).

<sup>2)</sup> O. J. Lodge, Journ. of the Soc. of Arts, May 1886; Phil. Mag. 20. p. 217. 1888.

beschrieben habe. Die benutzten Wellen waren solche, welche in Drähten einen Abstand der Knoten von nahezu 3 m hatten.

1. Wirkt ein primärer Leiter durch den Luftraum hindurch auf einen secundären Leiter, so wird man nicht zweifeln, dass die Wirkung in den letzteren von aussen her eindringt. Denn es kann als feststehend angesehen werden, dass die Wirkung sich im Luftraume von Punkt zu Punkt fortpflanzt, dieselbe wird also zuerst die äusseren Grenzen des Leiters treffen müssen, ehe sie auf das Innere zu wirken vermag. Nun erweist sich aber eine geschlossene Metallhülle als völlig undurchlässig für die Wirkung. Stellen wir den secundären Leiter in so günstiger Stellung neben dem Leiter auf, dass wir Funken von 5–6 mm Länge erhalten, und umgeben ihn nun mit einem geschlossenen Kasten aus Zinkblech, so lassen sich nicht mehr die geringsten Funken wahrnehmen. Ebenso verschwinden die Funken, wenn wir den primären Leiter vollständig mit einem metallischen Kasten umgeben. Bei relativ langsamen Stromschwankungen wird bekanntlich die Induktionskraft der Induction durch eine metallische Schutzhülle überhaupt nicht beeinträchtigt. Hierin liegt für den ersten Anblick ein Widerspruch mit den gegenwärtigen Erfahrungen. Doch ist derselbe nur ein scheinbarer und löst sich durch Betrachtung der zeitlichen Verhältnisse. In ähnlicher Weise schützt eine die Wärme schlecht leitende Hülle ihr Inneres vollständig gegen schnelle Schwankungen der äusseren Temperatur, weniger gegen langsame Schwankungen, und gar nicht gegen eine dauernde Erhöhung oder Erniedrigung derselben. Je dünner die Hülle, je schnelleren Schwankungen gestattet sie eine Einwirkung auf das Innere. Auch in unserem Falle muss offenbar die elektrische Wirkung in das Innere eindringen, wenn wir nur die Stärke des Metalles hinreichend verringern. Doch gelang es mir nicht, auf einfache Weise die erforderliche Dünne zu erreichen; ein mit Stanniol überzogener Kasten schützte noch vollständig, und ebenso ein Kasten aus Goldpapier, wenn nur Sorge getragen war, dass die Ränder der einzelnen Papiere sich wirklich leitend berührten. Hierbei war die Dicke des leitenden Metalls kaum auf  $\frac{1}{100}$  mm zu schätzen. Ich zog nun die schützende Hülle so eng wie möglich um den secundären Leiter zusammen. Zu dem Ende wurde seine Funkenstrecke auf etwa 20 mm erweitert und, um

gleichwohl elektrische Bewegungen in ihm wahrnehmen zu können, eine Hilfsfunkenstrecke gerade gegenüber der gewöhnlich benutzten angebracht. Die Funken in dieser waren dann zwar nicht so lang wie in der eigentlichen Funkenstrecke, da nun die Wirkung der Resonanz wegfiel, sie waren aber immer noch recht lebhaft. Nach dieser Vorbereitung wurde der Leiter vollständig umgeben mit einer möglichst dünnen röhrenförmigen leitenden Hülle, welche ihn nicht berührte, ihm aber so nahe als möglich war, und in der Nähe der Hilfsfunkenstrecke, um dieselbe benutzen zu können, durch ein Drahtnetz gebildet wurde. Zwischen den Polen dieser Hülle traten ebenso lebhafte Funken auf, wie vorher in dem secundären Leiter selbst, in dem eingeschlossenen Leiter aber liess sich nicht die geringste elektrische Bewegung erkennen. Es schadet dem Erfolge auch nicht, wenn die Hülle den Leiter in einzelnen Punkten berührt; die Isolirung beider voneinander ist nicht nöthig, um den Versuch gelingen zu lassen, sondern um ihm seine Beweiskraft zu geben. Offenbar können wir in der Vorstellung die Hülle noch enger um den Leiter zusammenziehen, als es in der Ausführung möglich ist, ja wir können sie mit der äussersten Schicht desselben zusammenfallen lassen. Obgleich also die elektrischen Erregungen an der Oberfläche unseres Leiters so kräftig sind, dass sie Funken von 5—6 mm ergeben, herrscht doch schon etwa  $\frac{1}{20}$  mm unterhalb der Oberfläche so vollkommene Ruhe, dass es nicht möglich ist, die kleinsten Funken zu erhalten. Es wird uns so die Vermuthung nahe gelegt, dass das, was wir inducirte Strömung in dem secundären Leiter nennen, ein Vorgang sei, welcher sich im wesentlichen in seiner Umgebung abspielt, sein Inneres aber kaum in Mitleidenschaft zieht.

2. Man könnte zugeben, dass sich dieses also verhalte, wenn die elektrische Erregung durch den nichtleitenden Raum zugeführt werde, aber behaupten, dass es eine andere Sache sei, wenn sich dieselbe, wie man zu sagen pflegt, in einem Leiter fortgepflanzt habe. Stellen wir neben die eine Endplatte unseres primären Leiters eine leitende Platte, und befestigen wir an dieselbe einen langen geraden Draht; wir haben in den früheren Versuchen bereits gesehen, wie sich mit Hülfe dieses Drahtes die Wirkung der primären Schwingung auf grosse Entfernungen fortleiten lässt. Die gewöhnliche Anschauung ist, dass dabei

eine Welle im Drahte fortschreite. Wir wollen aber zu zeigen versuchen, dass sich alle Aenderungen auf den äusseren Raum und die Oberfläche beschränken, und dass das Innere des Drahtes von der vorübergehenden Welle nichts weiss. Ich stellte zuerst Versuche in der folgenden Weise an. Aus der Drahtleitung wurde ein Stück von 4 m Länge entfernt und ersetzt durch zwei Streifen von Zinkblech von 4 m Länge und 10 cm Breite, welche flach aufeinander gelegt, und deren sich berührende Enden fest miteinander verbunden wurden. Zwischen die Streifen längs der Mittellinie derselben und also von ihrem Metall fast völlig umgeben, wurde auf die ganze Länge von 4 m ein mit Guttapercha überzogener Kupferdraht gelegt. Es war für die Versuche gleichgültig, ob die äusseren Enden dieses Drahtes mit den Streifen leitend verbunden oder von diesen isolirt waren, doch waren meistens die Enden mit den Zinkstreifen verlöthet. Der Kupferdraht war in der Mitte durchschnitten, und seine Enden führten, umeinander gewunden, aus dem Zwischenraum der Streifen heraus zu einer feinen Funkenstrecke, welche erkennen lassen sollte, ob in dem Draht eine elektrische Bewegung stattfindet. Wurden durch die ganze Vorrichtung möglichst kräftige Wellen geleitet, so war gleichwohl in der Funkenstrecke nicht die geringste Wirkung wahrzunehmen. Wurde darauf aber der Kupferdraht an irgend einer Stelle auf eine Strecke von einigen Decimetern so weit hervorgezerrt, dass er nur ein wenig aus dem Zwischenraum der Streifen herausah, so traten sofort Funken auf. Je weiter und auf eine je längere Strecke hin der Kupferdraht über den Rand der Zinkstreifen hin vorsprang, desto lebhafter waren die Funken. Es trugen also nicht die ungünstigen Widerstandsverhältnisse die Schuld, dass wir vorher keine Funken hatten, denn diese Verhältnisse haben sich nicht geändert, sondern es war vorher der Draht im Inneren der leitenden Masse dem von aussen kommenden Einflusse entzogen. Auch haben wir nur nöthig, den vorspringenden Theil des Drahtes mit ein wenig Stanniol zu umhüllen, welches mit den Zinkstreifen in leitender Verbindung steht, um die Funken sofort wieder aufzuheben. Wir haben dadurch den Kupferdraht in das Innere des Leiters zurückgebracht. Führen wir um das aus dem Zwischenraum hervorstehende Stück des Guttaperchadrahtes einen anderen Draht in etwas grösserem

Bogen herum, so werden die Funken ebenfalls vermindert, der zweite Draht fängt dem ersteren gewissermassen die Einwirkung von aussen ab. Ja, man kann sagen, dass in ähnlicher Weise der Rand des Zinkstreifens selber der Mitte des Streifens die Induction abfängt. Denn entfernen wir jetzt den einen der beiden Zinkstreifen und lassen den Guttaperchadraht einfach auf dem anderen aufliegen, so nehmen wir zwar stets Funken in dem Drahte wahr, dieselben sind aber äusserst schwach in der Mitte des Streifens, viel kräftiger in der Nachbarschaft des Randes. Wie bei der Vertheilung durch elektrostatische Influenz die Elektricität sich vorzugsweise an dem scharfen Rande des Streifens anhäufen würde, so scheint sich hier die Strömung vorzugsweise längs des Randes zu bewegen. Hier wie dort kann man sagen, dass die äusseren Theile die inneren vor dem von aussen kommenden Einfluss schützen.

Etwas reinlichere Versuche mit gleicher Beweiskraft sind die folgenden. Ich schaltete in die wellenführende Leitung einen sehr dicken Kupferdraht von 1,5 m Länge ein, dessen Enden zwei kreisförmige metallene Scheiben von 15 cm Durchmesser trugen. Der Draht ging durch die Mittelpunkte der Scheiben, die Ebene der Scheiben stand senkrecht auf dem Drahte, jede der Scheiben trug an ihrem Rande 24 Löcher in gleichen Abständen. In den Draht wurde eine Funkenstrecke eingeschaltet. Wenn die Wellen den Draht durchliefen, erregten sie Funken bis zu 6 mm Länge. Nun wurde zwischen zwei correspondirenden Löchern der Scheiben ein dünner Kupferdraht ausgespannt. Dadurch sank die Länge der Funken auf 3,2 mm. Es änderte übrigens nichts, wenn statt des dünnen Drahtes ein dicker, oder wenn statt des einen Drahtes ihrer vierundzwanzig genommen wurden, sobald dieselben unmittelbar nebeneinander durch dieselben beiden Löcher gezogen wurden. Anders aber war es, wenn die Drähte auf den Rand der Scheiben vertheilt wurden. Wurde dem ersten Draht gegenüber ein zweiter zugefügt, so sank die Funkenlänge auf 1,2 mm. Wurden zwei weitere Drähte in den mittleren Lagen hinzugegeben, so ging die Funkenlänge auf 0,5 mm zurück; die Einschaltung weiterer vier Drähte in die Mittellagen liess kaum Funken von 0,1 mm bestehen; nach Einschaltung aller 24 Drähte in gleichen Abständen waren durchaus keine Funken mehr im Innern wahr-

zunehmen. Der Widerstand des inneren Drahtes war gleichwohl viel kleiner, als der aller äusseren Drähte zusammen genommen, auch haben wir noch besonders gezeigt, dass es auf diesen Widerstand nicht ankommt. Stellen wir neben der entstandenen Drahtröhre als Nebenschluss eine Leitung her, welche der im Inneren der Röhre befindlichen Leitung vollkommen gleich ist, so haben wir in ersterer lebhaftes Funken, in letzterer durchaus keine. Erstere ist ungeschützt, letztere geschützt durch das Drahtrohr. Wir haben hier ein elektrodynamisches Analogon zu dem elektrostatischen Versuch, welcher unter dem Namen des elektrischen Vogelbauers bekannt ist. Ich änderte nunmehr den Versuch in der Weise ab, welche durch die Fig. 33 erläutert wird. Die beiden Scheiben wurden so nahe zusammengedrückt, dass sie mit den zwischen ihnen gespannten Drähten einen zur



Fig. 33.

Aufnahme des Funkenmikrometers eben noch genügenden Drahtkäf *A* bildeten. Die eine Scheibe *a* blieb mit dem Mitteldraht leitend verbunden, die andere *β* wurde durch einen ringförmigen Einschnitt von ihm isolirt und dafür mit einem leitenden Rohre *γ* verbunden, welches, von dem Mitteldraht isolirt, denselben auf eine Strecke von 1,5 m hin vollständig umgab. Das freie Ende des Rohres *δ* wurde dann mit dem Mitteldraht leitend verbunden. Es befindet sich nunmehr wieder der Draht mit seiner Funkenstrecke in metallisch geschütztem Raume, und es erscheint nach dem vorigen nur selbstverständlich, dass sich in dem Draht nicht die geringste elektrische Bewegung zu erkennen giebt, man mag nun die Wellen in dem einen oder in dem anderen Sinne durch die Vorrichtung leiten. Insofern also bietet diese Anordnung nichts Neues, sie hat aber vor der vorigen den Vorzug, dass wir das schützende Metallrohr *γ* durch Röhren von immer geringerer Wandstärke ersetzen können, um zu untersuchen, welche Wandstärke noch genügt, den Einfluss von aussen abzuhalten. Sehr dünne Messingröhren, Röhren von Stanniol und Röhren von unechtem Schaumgold

erwiesen sich noch als vollkommen schützend. Nun nahm ich Glasröhren, welche auf chemischem Wege verülbert worden waren, und da war es allerdings leicht, Röhren von solcher Dünne herzustellen, dass trotz ihres Schutzes lebhaftes Funken im Mitteldraht auftraten. Aber es zeigten sich Funken doch nur dann, wenn die Silberschicht schon nicht mehr völlig undurchlässig für Licht und sicherlich dünner als  $\frac{1}{100}$  mm war. Nicht in der Wirklichkeit, aber in der Vorstellung, können wir die Schutzhülle sich mehr und mehr um den Draht zusammenziehen und schliesslich mit seiner Oberfläche zusammenfallen lassen; wir dürfen wohl sicher sein, dass sich hierbei nichts Wesentliches mehr ändern wird. Wenn also die wirklichen Wellen auch noch so lebhaft um den Draht spielen, so ist doch sein Inneres völlig in Ruhe, und die Wirkung der Wellen dringt kaum viel tiefer in das Innere des Drahtes ein, als das Licht, welches von seiner Oberfläche reflectirt wird. Den eigentlichen Sitz dieser Wellen werden wir also auch nicht im Drahte suchen dürfen, sondern eher vermuthen, dass er in seiner Umgebung sich befindet, und statt zu sagen, dass unsere Wellen sich im Drahte fortpflanzen, werden wir besser sagen, dass dieselben an dem Drahte entlang gleiten.

Statt in die Drahtleitung, in welcher wir indirect Wellen erregen, können wir die zuletzt beschriebene Vorrichtung auch in den einen Zweig unseres primären Leiters selbst einschalten. In solchen Versuchen erhielt ich die gleichen Resultate wie in den bisherigen. Auch unsere primäre Schwingung erfolgt also, ohne den Leiter, um welchen sie spielt, anders als in seiner äussersten Oberflächenschicht zu betheiligen,<sup>1)</sup> auch ihren Sitz werden wir nicht im Innern des Leiters suchen dürfen.

An unsere letzten Erfahrungen über die Drahtwellen wollen wir noch eine Bemerkung knüpfen, welche die Ausführung der Versuche betrifft. Wenn unsere Wellen ihren Sitz in der Umgebung des Drahtes haben, so wird die an einem einzelnen Draht entlang gleitende Welle sich nicht allein durch die Luft, sondern,

<sup>1)</sup> Die Berechnung der Selbstinduction derartiger Leiter unter der Annahme gleichförmiger Stromdichte im Innern muss also zu ganz unzuverlässigen Resultaten führen. Es ist zu verwundern, dass die unter so fehlerhaften Voraussetzungen gewonnenen Resultate doch annähernd mit der Wirklichkeit übereinzustimmen scheinen.

da ihre Wirkung sich auf grosse Entfernung hin erstreckt, zum Theil auch in den benachbarten Wänden, dem Fussboden u. s. w. fortpflanzen und so zu einer verwickelten Erscheinung werden. Stellen wir aber gegenüber den beiden Polen unseres primären Leiters in genau gleicher Weise zwei Hilfsplatten auf, verbinden mit jeder derselben einen Draht und führen beide Drähte gerade und parallel miteinander auf gleiche Entfernung fort, so macht sich die Wirkung der Wellen nur in der Nähe des Zwischenraums beider Drähte geltend. Die Welle eilt also auch lediglich in dem Zwischenraume der Drähte fort. Wir können also Sorge tragen, dass die Fortpflanzung lediglich durch die Luft oder einen anderen Isolator erfolge, und die Versuche werden bei dieser Anordnung bequemer und reiner. Uebrigens ergeben sich dabei nahezu dieselben Wellenlängen, wie in einzelnen Drähten, sodass auch bei solchen die Wirkung der Störungen nicht erheblich zu sein scheint.

3. Aus dem bisher Vorgetragenen dürfen wir schliessen, dass schnelle elektrische Schwingungen völlig unfähig sind, Metallschichten von einiger Dicke zu durchdringen, und dass es daher auf keine Weise möglich ist, mit Hilfe solcher Schwingungen im Inneren geschlossener metallischer Hüllen Funken zu erregen. Sehen wir also durch solche Schwingungen Funken erzeugt im Inneren von Metallhüllen, welche beinahe aber nicht vollständig geschlossen sind, so werden wir schliessen müssen, dass die elektrische Erregung eingedrungen sei durch die vorhandenen Oeffnungen. Diese Auffassung ist auch richtig, aber sie widerspricht in einzelnen Fällen der üblichen Anschauung so vollkommen, dass man sich erst durch besondere Versuche bewegen lässt, die übliche Anschauung zu Gunsten der neuen zu verlassen. Wir wollen einen hervorragenden Fall dieser Art herausgreifen, und indem wir für diesen die Richtigkeit unserer Anschauung zur Gewissheit erheben, dieselbe auch für alle übrigen Fälle wahrscheinlich machen. Wir nehmen wieder die Vorrichtung, welche wir im vorigen Abschnitte beschrieben und in Fig. 33 abgebildet haben, nur unterlassen wir es jetzt, bei  $\delta$  die schützende Röhre mit dem Mitteldraht in Verbindung zu setzen. Nun leiten wir den Wellenzug in der Richtung von  $A$  gegen  $\delta$  durch die Vorrichtung. Wir erhalten jetzt lebhafte Funken aus  $A$ , dieselben sind von ähnlicher Stärke, als hätten wir die Funkenstrecke ohne allen Schutz in die Drahtleitung einge-

schaltet. Die Funken werden auch nicht wesentlich kleiner, wenn wir das Rohr  $\gamma$ , ohne sonst etwas zu ändern, bedeutend, etwa auf 4 m verlängern. Nach der üblichen Auffassung wird man sagen: die bei  $A$  ankommende elektrische Welle durchsetze mit Leichtigkeit die dünne und gut leitende Metallscheibe  $a$ , überspringe dann die Funkenstrecke bei  $A$  und pflanze sich in dem mittleren Draht fort. Nach unserer Auffassung müssen wir dagegen den Vorgang in folgender Weise schildern. Die bei  $A$  ankommende Welle ist durchaus unermügend, die Metallscheibe zu durchdringen, sie gleitet also an derselben auf die Aussenseite der Vorrichtung über und pflanzt sich längs derselben fort bis zu dem 4 m entfernten Punkte  $\delta$ . Hier theilt sie sich; ein Theil, welcher uns jetzt nichts angeht, pflanzt sich sogleich an dem geraden Drahte fort, ein anderer aber biegt in das Innere der Röhre ein und läuft hier in dem Luftraume zwischen Röhre und Mitteldraht die 4 m zurück bis zu der Funkenstrecke in  $A$ , wo er nunmehr den Funken erregt. Dass unsere Auffassung, obwohl verwickelter, dennoch die richtige ist, beweisen wir durch die folgenden Versuche. Erstens verschwindet jede Spur der Funken in  $A$ , sobald wir die Oeffnung bei  $\delta$ , sei es auch nur durch eine Kapsel von Stanniol, verschliessen. Unsere Wellen haben nur eine Wellenlänge von 3 m; ehe ihre Wirkung bis zum Punkte  $\delta$  gekommen ist, ist sie bei  $A$  schon auf Null zurückgegangen und hat das Zeichen gewechselt. Welchen Einfluss könnte also der entfernte Verschluss bei  $\delta$  auf den Funken in  $A$  hervorbringen, wenn letzterer wirklich sogleich beim Vorübergang der Welle aus der Metallwand hervorbräche? Zweitens verschwinden die Funken, wenn wir den Mitteldraht noch innerhalb des Rohres  $\gamma$  oder in der Oeffnung  $\delta$  selbst endigen lassen, treten aber auf, wenn wir das Ende des Drahtes auch nur um 20–30 cm aus der Oeffnung hervorragen lassen. Welchen Einfluss könnte diese unbedeutende Verlängerung des Drahtes auf die Funken in  $A$  haben, wenn nicht das hervorragende Ende des Drahtes eben das Mittel wäre, durch welches ein Theil der Welle aufgefangen und durch die Oeffnung  $\delta$  in das Innere eingeführt wird? Wir schalten drittens zwischen  $A$  und  $\delta$  in den Mitteldraht eine zweite Funkenstrecke  $B$  ein, welche wir ganz ebenso mit einem Drahtnetz umgeben, wie  $A$ . Machen wir den Polabstand in  $B$  so gross,

dass keine Funken mehr übergehen können, so ist es auch nicht mehr möglich, in *A* merkliche Funken zu erhalten. Verhindern wir aber in gleicher Weise den Uebergang der Funken in *A*, so hat dies kaum einen Einfluss auf die Funken in *B*. Es ist also der Uebergang in *B* Vorbedingung für den in *A*, nicht aber der Uebergang in *A* Vorbedingung für den in *B*. Die Richtung der Fortpflanzung im Inneren ist also von *B* nach *A*, nicht von *A* nach *B*.

Wir können indessen weitere Beweise beibringen, welche überzeugender sind. Wir wollen verhindern, dass die von  $\delta$  gegen *A* zurückeilende Welle ihre Energie in der Funkenbildung erschöpfe, indem wir die Funkenstrecke entweder verschwindend klein oder sehr gross machen. In diesem Falle wird die Welle in *A* reflectirt werden und nun wiederum von *A* gegen  $\delta$  hin fortschreiten. Dabei muss sie aber mit den ankommenden Wellen sich zu stehenden Schwingungen zusammensetzen und Knoten und Bäuche bilden. Gelingt es uns, dieselben nachzuweisen, so werden wir nicht mehr an der Richtigkeit unserer Auffassung zweifeln. Zu diesem Nachweise müssen wir allerdings unserem Apparate etwas andere Dimensionen geben, um elektrische Resonatoren in sein Inneres einführen zu können. Ich leitete also den Mitteldraht durch die Axe einer cylindrischen Röhre von 5 m Länge und 30 cm Durchmesser. Dieselbe war nicht aus massivem Metall gefertigt, sondern aus 24 Kupferdrähten hergestellt, welche parallel miteinander längs der Mantelfläche über sieben in gleichen Abständen aufgestellte Kreisringe von starkem Draht ausgespannt waren, wie es Fig. 34 vorstellt. Den zu benutzenden Resonator bildete ich in folgender Weise:

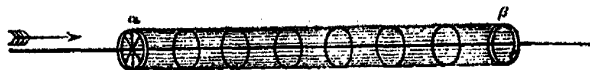


Fig. 34.

Aus Kupferdraht von 1 mm Stärke wurde eine dichte Spirale von 1 cm Durchmesser gerollt, von dieser wurden etwa 125 Windungen genommen, etwas gereckt und zu einem Kreise von 12 cm Durchmesser gebogen; zwischen die freien Enden wurde eine verstellbare Funkenstrecke eingeschaltet. Besondere Versuche hatten ergeben, dass dieser Kreis mit den 3 m langen

Drahtwellen in Resonanz war, und doch war er hinreichend klein von Umfang, um zwischen den Mitteldraht und den Mantel der Röhre eingeführt zu werden. Waren zunächst beide Enden der Röhre offen, und wurde dann der Resonator so in den Zwischenraum gehalten, dass seine Ebene den Mitteldraht aufnahm, und dass seine Funkenstrecke nicht gerade nach innen oder nach aussen gerichtet, sondern dem einen oder dem anderen Ende der Röhre zugewandt war, so waren in ihm lebhaft Funken von  $\frac{1}{2}$ —1 mm Länge vorhanden. Wurden nun beide Enden der Röhre durch vier kreuzweise gespannte, mit der Mittelleitung verbundene Drähte verschlossen, so waren im Innern nicht die kleinsten Funken mehr aufzufinden, ein Beweis, dass das Netzwerk der Röhre für unsere Versuche hinreichend dicht ist. Nunmehr wurde der Verschluss auf der Seite  $\beta$  der Röhre, auf derjenigen nämlich, welche dem Ursprung der Wellen abgekehrt war, entfernt. Unmittelbar neben dem noch vorhandenen Verschluss, also an der Stelle  $\alpha$ , welche der Funkenstrecke  $A$  unserer früheren Versuche entspricht, waren auch jetzt keine Funken im Resonator wahrzunehmen. Entfernte man sich aber von dieser Stelle gegen  $\beta$  hin, so traten Funken auf, wurden sehr lebhaft in 1,5 m Entfernung von  $\alpha$ , nahmen dann wieder ab, erloschen fast völlig in 3 m Entfernung, um dann bis ans Ende der Röhre wieder zu wachsen. Wir finden unsere Vermuthung also bestätigt. Dass wir am geschlossenen Ende einen Knoten finden, ist gerechtfertigt, denn an der metallischen Verbindung zwischen Mitteldraht und Mantel muss die elektrische Kraft zwischen beiden nothwendig Null sein. Anders ist es, wenn wir an dieser Stelle unmittelbar neben dem Verschluss die Mittelleitung zerschneiden und eine Lücke von einigen Centimetern einschalten. In diesem Falle wird die Welle mit entgegengesetzter Phase wie vorher reflectirt, und wir haben bei  $\alpha$  einen Bauch zu erwarten. In der That finden wir nun hier lebhaft Funken im Resonator; dieselben werden aber schnell kleiner, wenn wir uns gegen  $\beta$  hin von  $\alpha$  entfernen, verschwinden fast gänzlich in 1,5 m Abstand, werden wieder lebhaft in 3 m Abstand und lassen wiederum in 4,5 m Abstand, also 0,5 m von dem offenen Ende der Röhre einen zweiten Knoten deutlich erkennen. Die Bäuche und Knoten, welche wir beschrieben haben, liegen in festen Abständen vom geschlossenen Ende und verschieben sich mit diesem, sind übrigens

aber gänzlich unabhängig von den Vorgängen ausserhalb des Rohres, z. B. von den hier etwa hervorgerufenen Knoten und Bäuchen. Die Erscheinungen treten auch genau in gleicher Weise auf, wenn wir die Welle in der Richtung vom offenen zum geschlossenen Ende das System durchlaufen lassen; ihr Interesse ist alsdann nur deshalb ein geringeres, weil die Art der Ausbreitung der Welle in diesem Fall weniger von der üblichen Vorstellung abweicht, als in dem Falle, welchen wir näher ins Auge gefasst haben. Lässt man beide Enden des Rohres offen, den Mitteldraht unzertheilt und erzeugt nun in dem ganzen System stehende Wellen mit Knoten und Bäuchen, so findet man stets zu jedem Knoten ausserhalb des Rohres einen correspondirenden Knoten im Innern, ein Beweis, dass die Fortpflanzung innerhalb und ausserhalb wenigstens nahezu mit gleicher Geschwindigkeit erfolgt.

Ueberblickt man die Versuche, welche wir beschrieben, und die Deutung, welche wir denselben gegeben haben, ferner die Auseinandersetzungen der in der Einleitung genannten Forscher, so muss besonders ein Unterschied der hier vertretenen Auffassung gegen die übliche Anschauung auffallen. In der letzteren erscheinen die Leiter als diejenigen Körper, welche einzig die Fortführung der elektrischen Erregung vermitteln; die Nichtleiter als die Körper, welche sich dieser Fortführung entgegenstellen. Nach unserer Auffassung hingegen scheint alle Fortpflanzung der elektrischen Erregung durch die Nichtleiter zu geschehen, die Leiter setzen dieser Fortpflanzung einen für schnelle Aenderungen unüberwindlichen Widerstand entgegen. Fast könnte man also geneigt sein, der Behauptung zuzustimmen, dass Leiter und Nichtleiter nach dieser Auffassung ihre Namen vertauschen müssten. Indessen kommt ein solches Paradoxon doch nur dadurch zu Stande, dass man die Angabe dessen unterschlägt, von dessen Leitung oder Nichtleitung man redet. Unzweifelhaft sind die Metalle Nichtleiter für die elektrische Kraft, eben dadurch zwingen sie dieselbe unter gewissen Verhältnissen, sich nicht zu zerstreuen, sondern zusammenzubleiben, und werden so Leiter des scheinbaren Ursprungs dieser Kräfte, der Elektrizität, auf welche sich die übliche Terminologie bezieht.

## 11. Ueber Strahlen elektrischer Kraft.

(Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. v. 13. Dez. 1888. Wiedemanns Ann. 86, p. 769.)

Unmittelbar nachdem es mir geglückt war zu erweisen, dass sich die Wirkung einer elektrischen Schwingung als Welle in den Raum ausbreitet, habe ich Versuche angestellt, diese Wirkung dadurch zusammenzuhalten und auf grössere Entfernungen bemerkbar zu machen, dass ich den erregenden Leiter in die Brennlinie eines grösseren parabolischen Hohlspiegels aufstellte. Diese Versuche führten nicht zum Ziel, und ich konnte mir auch klar machen, dass der Misserfolg nothwendig bedingt war durch das Missverhältniss, welches zwischen der Länge der benutzten Wellen, 4—5 m, und den Dimensionen bestand, welche ich dem Hohlspiegel im besten Falle zu geben im Stande war. Neuerdings habe ich nun bemerkt, dass sich die von mir beschriebenen Versuche noch ganz wohl mit Schwingungen anstellen lassen, welche mehr als zehnmal schneller, und mit Wellen, welche mehr als zehnmal kürzer sind, als die zuerst aufgefundenen. Ich bin deshalb auf die Benutzung von Hohlspiegeln zurückgekommen und habe nunmehr besseren Erfolg gehabt, als ich zu hoffen wagte. Es gelang mir, deutliche Strahlen elektrischer Kraft zu erzeugen und mit denselben die elementaren Versuche anzustellen, welche man mit dem Lichte und der strahlenden Wärme auszuführen gewohnt ist. Ueber diese Versuche soll in Folgendem berichtet werden.

### Die Apparate.

Die Methode, nach welcher kurze Wellen erregt werden, ist die gleiche, nach welcher wir auch längere erregten. Der

benutzte primäre Leiter wird am einfachsten beschrieben in folgender Weise: Man denke sich einen cylindrischen Messingkörper<sup>1)</sup> von 3 cm Durchmesser und 26 cm Länge in der Mitte seiner Länge unterbrochen durch eine Funkenstrecke, deren Pole beiderseits durch Kugelflächen von 2 cm Radius gebildet werden. Die Länge des Leiters wird nahezu der halben Wellenlänge gleich sein, welche der zugehörigen Schwingung in geraden Drähten entspricht; schon hieraus kann man ein angenähertes Urtheil über die Schwingungsdauer gewinnen. Es ist wesentlich, dass die Polflächen der Funkenstrecke häufig neu polirt und während der Versuche vor der Belichtung durch gleichzeitige Seitenentladungen sorgfältig geschützt werden, es versagen sonst die Schwingungen. Der Anblick und der Klang der Funken lässt stets erkennen, ob die Funkenstrecke in genügendem Zustande ist. Die Entladung wird den beiden Hälften des Leiters zugeführt durch zwei dick mit Guttapercha überzogene Drähte, welche nahe der Funkenstrecke zu beiden Seiten derselben münden. Als Inductorium verwandte ich nicht mehr den grossen Ruhmkorff'schen Apparat, sondern mit Vortheil einen kleinen Funkengeber von Keiser und Schmidt, dessen stärkste Leistung Funken von 4,5 cm Länge zwischen Spitzen war. Er wurde durch drei Accumulatoren getrieben und konnte dabei zwischen den Kugelflächen des primären Leiters Funken von 1—2 cm Länge geben. Zu den Versuchen wurde dann die Funkenstrecke auf eine Länge von 3 mm zusammengeschoben.

Der Nachweis der elektrischen Kräfte im Raum geschah auch hier mit Hülfe der feinen Funken, welche dieselben in einem secundären Leiter auftreten lassen. Zum Theil diente wie früher ein in sich selber drehbarer Kreis, welcher mit dem primären Leiter ungefähr gleiche Schwingungsdauer hatte. Derselbe hatte jetzt nur 7,5 cm Durchmesser und war aus einem Kupferdraht von 1 mm Dicke gebildet. Das eine Ende des Drahtes trug eine polirte Messingkugel von einigen Millimetern Durchmesser, das andere Ende war zugespitzt und wurde durch eine von dem Drahte isolirte feine Schraube auf äusserst kleine Abstände von der Messingkugel eingestellt. Es

<sup>1)</sup> Vgl. die Abbildungen, Fig. 35 und 36 und deren Erläuterung am Schlusse der Arbeit.

handelt sich begreiflicherweise stets nur um Fünkchen von einigen Hundertstel Millimetern Länge, und man urtheilt bei einiger Uebung mehr nach der Helligkeit der Funken, als nach ihrer Länge.

Der kreisförmige Leiter giebt nur eine Differenzwirkung und ist ungeeignet, in der Brennnlinie eines Hohlspiegels angebracht zu werden, es wurde deshalb hauptsächlich gearbeitet mit einem anderen secundären Leiter von folgender Einrichtung: Zwei gerade Drahtstücke von 50 cm Länge und 5 mm Durchmesser waren in einer und derselben Geraden so angeordnet, dass die einander zugekehrten Endpunkte einen Abstand von 5 cm hatten. Von diesen Endpunkten führten zwei 15 cm lange, 1 mm starke Drähte parallel miteinander und senkrecht zu den erstgenannten Drähten zu einer Funkenstrecke, welche ähnlich eingerichtet war, wie die des kreisförmigen Leiters. In diesem Leiter war auf die Wirkung der hier überhaupt wenig hervortretenden Resonanz verzichtet. Es wäre einfacher gewesen, die Funkenstrecke unmittelbar in der Mitte des geraden Drahtes anzubringen, aber die Funkenstrecke hätte alsdann nicht im Brennpunkt des Hohlspiegels gehandhabt und beobachtet werden können, ohne dass der Beobachter die Oeffnung des Spiegels verdeckt hätte. Aus diesem Grunde war die beschriebene Anordnung einer an sich vortheilhafteren vorgezogen.

#### Die Erzeugung des Strahles.

Stellt man nun die primäre Schwingung in einem grösseren freien Raume auf, so kann man mit Hülfe des kreisförmigen Leiters in ihrer Nachbarschaft alle diejenigen Erscheinungen in verkleinertem Maassstabe wahrnehmen, welche ich früher in der Nachbarschaft einer grösseren Schwingung beobachtet und beschrieben habe.<sup>1)</sup> Die grösste Entfernung, bis zu welcher sich in den secundären Leitern noch Funken wahrnehmen lassen, beträgt 1,5 m, bei günstigem Zustand der primären Funkenstrecke auch wohl 2 m. Die Wirkung nach einer Seite wird verstärkt, wenn auf der entgegengesetzten Seite der primären Schwingung eine ebene leitende Wand parallel der Schwingung in passendem

<sup>1)</sup> Siehe No. 5. 7. 8.

Abstände aufgestellt wird. Wird allerdings der Abstand sehr klein oder etwas grösser als 30 cm gewählt, so wirkt die Wand schädlich, sie wirkt kräftig fördernd bei 8—15 cm Abstand, schwach fördernd bei 45 cm Abstand und ist einflusslos bei grösseren Abständen. Wir haben diese Erscheinung bereits früher gedeutet und schliessen aus derselben, dass die der primären Schwingung entsprechende Welle in der Luft eine halbe Wellenlänge von etwa 30 cm hat. Eine weitergehende Verstärkung dürfen wir erwarten, wenn wir die ebene Wand ersetzen durch einen Hohlspiegel von der Gestalt eines parabolischen Cylinders, in dessen Brennpunkt die Längsaxe der primären Schwingung fällt. Soll der Hohlspiegel die Fernwirkung recht concentriren, so ist es vorthellhaft, seine Brennweite so klein als möglich zu wählen. Soll aber nicht die directe Welle die Wirkung der reflectirten sogleich wieder aufheben, so darf die Brennweite auch nicht viel weniger als ein Viertel Wellenlänge betragen. Ich wählte deshalb als Brennweite  $12\frac{1}{2}$  cm und stellte den Hohlspiegel her, indem ich ein Zinkblech von 2 m Länge, 2 m Breite und  $\frac{1}{2}$  mm Dicke über einem Holzgestell von genauer Krümmung in die gewünschte Gestalt bog. Die Höhe des Spiegels ergab sich so zu 2 m, die Breite seiner Oeffnung zu 1,2 m, seine Tiefe zu 0,7 m. Die primäre Schwingung wurde im Mittelpunkt der Brennpunktlinie befestigt. Die Drähte, welche die Entladung zuführten, liess ich den Spiegel durchsetzen; das Inductorium und die Elemente befanden sich demnach hinter dem Spiegel und störten nicht. Untersuchen wir nun wieder die Nachbarschaft der Schwingung mit unseren Leitern, so finden wir hinter dem Spiegel und seitwärts desselben überhaupt keine Wirkung, in der Richtung der optischen Axe des Spiegels aber bleiben die Funken wahrnehmbar bis zu Abständen von 5—6 m. Bis auf weitere Abstände, nämlich bis etwa 9—10 m, können die Funken wahrgenommen werden in der Nähe einer ebenen leitenden Wand, welche wir senkrecht den fortschreitenden Wellen entgegenstellen. Es verstärken nämlich die von der Wand zurückgeworfenen Wellen die ankommenden in gewissen Punkten. In anderen Punkten wiederum schwächen die beiden Wellen einander. Man nimmt vor der ebenen Wand mit dem geradlinigen Leiter sehr deutliche Maxima und Minima und in dem kreisförmigen Leiter die für stehende

Wellen charakteristischen Interferenzerscheinungen wahr, welche ich früher beschrieben habe. Ich war im Stande, vier Knotenpunkte zu unterscheiden, welche in der Wand, in 33, in 65 und in 98 cm Abstand von derselben fielen. Mit grosser Annäherung beträgt also die halbe Wellenlänge der benutzten Wellen 33 cm und ihre Schwingungsdauer 1,1 Tausendmilliontel der Secunde, unter Voraussetzung der Lichtgeschwindigkeit für die Geschwindigkeit der Ausbreitung. In Drähten ergab die Schwingung eine Wellenlänge von 29 cm. Es erscheint also auch bei diesen kurzen Wellen die Geschwindigkeit in Drähten ein Weniges geringer als die Geschwindigkeit im Luftraum, aber das Verhältniss beider Geschwindigkeiten kommt dem theoretischen Werthe Eins äusserst nahe und weicht davon nicht entfernt so stark ab, als unsere Versuche es für längere Wellen wahrscheinlich machten. Diese auffallende Erscheinung bedarf noch der Aufklärung. Da sich die Erscheinungen lediglich in der Nähe der optischen Axe des Spiegels zeigen, so bezeichnen wir das erzeugte Gebilde als einen aus dem Hohlspiegel austretenden elektrischen Strahl.

Ich stellte nun einen zweiten, dem ersten genau gleichen Hohlspiegel her und brachte den geradlinigen secundären Leiter so in demselben an, dass die beiden 50 cm langen Drähte in die Brennpunktlinie fielen, die beiden zur Funkenstrecke führenden Drähte aber auf dem kürzesten Wege die Wandung des Spiegels isolirt durchsetzten. Die Funkenstrecke befand sich alsdann unmittelbar hinter dem Spiegel, und der Beobachter konnte sie einstellen und betrachten, ohne den Lauf der Wellen zu stören. Ich vermuthete, dass, wenn ich mit dieser Vorrichtung den Strahl auffinge, ich denselben noch auf grössere Entfernungen würde wahrnehmen können, und ich fand, dass ich mich nicht getäuscht hatte. In den Räumen, welche mir zu Gebote standen, konnte ich nunmehr die Funken von einem Ende zum anderen wahrnehmen. Die grösste Entfernung, bis zu welcher ich unter Benutzung einer Thüröffnung den Strahl verfolgte, betrug 18 m; nach den Ergebnissen der sogleich zu besprechenden Reflexionsversuche unterliegt es aber keinem Zweifel, dass in offenen Räumen sich mindestens bis zu 20 m müssen Funken erhalten lassen. Für die weiteren Versuche sind so grosse Entfernungen nicht nöthig, und es ist angenehm, wenn der secundäre Funkenstrom nicht allzu schwach ausfällt; eine Entfernung von 6—10 m

ist für die meisten Versuche die vortheilhafteste. Wir wollen jetzt die einfachen Erscheinungen durchgehen, welche sich ohne Schwierigkeit an dem Strahl vorweisen lassen. Wo nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, werden stets die Brennpuncten beider Spiegel als vertical gestellt angenommen.

#### Geradlinige Ausbreitung.

Stellt man in die gerade Verbindungslinie der Spiegel senkrecht zur Richtung des Strahles einen Schirm von Zinkblech von 2 m Höhe und 1 m Breite, so verlöschen die secundären Funken vollständig. Einen ebenso vollkommenen Schatten giebt ein Schirm von Stanniol oder von Goldpapier. Ein Gefäß, welches den Strahl kreuzt, lässt die secundäre Funkenstrecke dunkel werden, sobald er in den Raum des Strahles eintritt, und lässt dieselbe wieder aufleuchten, sobald er den Raum des Strahles verlässt. Isolatoren halten den Strahl nicht auf, durch eine Holzwand oder eine hölzerne Thür geht er hindurch, man sieht nicht ohne Verwunderung im Innern geschlossener Zimmer die Funken auftreten. Stellt man zwei leitende Schirme von 2 m Höhe und 1 m Breite symmetrisch rechts und links neben den Strahl senkrecht zu dessen Richtung auf, so beeinträchtigen dieselben die secundären Funken durchaus nicht, solange die Breite des Spaltes, welchen sie zwischen sich lassen, nicht kleiner wird, als die Oeffnung der Spiegel, nämlich als 1,2 m. Wird der Spalt enger gemacht, so nehmen die Funken ab und verlöschen, wenn die Breite des Spaltes unter 0,5 m sinkt. Wird die Breite des Spaltes auf 1,2 m belassen, aber derselbe seitlich aus der geraden Verbindungslinie der Spiegel verschoben, so erlöschen die Funken ebenfalls. Dreht man die optische Axe des gebenden Spiegels nach rechts oder links um etwa  $10^\circ$  aus der richtigen Lage, so werden die secundären Funken schwach, bei einer Drehung um etwa  $15^\circ$  verlöschen sie.

Eine geometrisch scharfe Grenze hat der Strahl, und haben die Schatten nicht, leicht kann man Erscheinungen hervorrufen, welche einer Beugung entsprechen.<sup>1)</sup> Maxima und Minima am

<sup>1)</sup> (Siehe Anmerkung 25 am Schluss des Buches.)

Rande der Schatten zu beobachten, ist mir indessen bisher nicht gelungen.

#### Polarisation.

Dass unser Strahl durch Transversalschwingungen gebildet wird und geradlinig polarisirt im Sinne der Optik ist, daran haben wir freilich schon nach der Art, in welcher wir ihn erzeugen, keinen Zweifel. Wir können die Thatsache aber auch durch den Versuch erweisen. Drehen wir unseren empfangenden Spiegel um den Strahl als Axe, bis seine Brennnlinie und somit auch der secundäre Leiter in die horizontale Lage gelangt, so verschwinden die secundären Funken mehr und mehr, und wir erhalten bei gekreuzter Lage der beiden Brennnlinien keine Funken, selbst wenn wir die Spiegel auf geringe Entfernung zusammenrücken. Die beiden Spiegel verhalten sich wie Polarisator und Analysator eines Polarisationsapparates. Ich liess nun einen achteckigen Holzrahmen von 2 m Höhe und 2 m Breite herstellen und denselben mit Kupferdrähten von 1 mm Dicke bespannen, alle Drähte waren einander parallel, und jeder stand von seinen Nachbarn um 3 cm ab. Wurden jetzt die beiden Spiegel mit parallelen Brennnlinien aufgestellt und der Drahtschirm senkrecht zum Strahl so in denselben eingeschoben, dass die Richtung der Drähte die Richtung der Brennnlinien senkrecht kreuzte, so beeinträchtigte der Schirm die secundären Funken so gut wie gar nicht. Wurde aber der Schirm dem Strahl in solcher Weise entgegengestellt, dass seine Drähte den Brennnlinien parallel waren, so fing er den Strahl vollständig ab. In Hinsicht der hindurchgehenden Energie verhält sich also der Schirm gegen unseren Strahl genau wie eine Turmalinplatte gegen einen geradlinig polarisirten optischen Strahl. Es wurde nun wieder die Brennnlinie des empfangenden Spiegels horizontal gelegt, Funken traten dann, wie erwähnt, nicht auf. Solche Funken wurden auch durch das Einschieben des Schirmes in den Strahl nicht hervorgerufen, sobald die Drähte desselben horizontal oder vertical gerichtet waren. Wurde aber der Holzrahmen so aufgestellt, dass die Drähte in einer der beiden möglichen Lagen unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigt waren, so wurde durch Einschiebung des Schirmes die secundäre Funkenstrecke sogleich erhellt. Offenbar zerlegt der Schirm die an-

kommende Schwingung in zwei Componenten und lässt nur diejenige Componente hindurch, welche auf der Richtung seiner Drähte senkrecht steht. Diese Componente ist unter  $45^\circ$  gegen die Brennlinie des zweiten Spiegels geneigt und vermag, nochmals durch den Spiegel zerlegt, auf den secundären Leiter zu wirken. Die Erscheinung ist vollkommen gleichartig der Aufhellung des dunklen Feldes zweier gekreuzten Nicols durch eine in passender Lage eingeschobene Turmalinplatte.

Es sei in Hinsicht der Polarisation noch die folgende Bemerkung gestattet: Mit den in der gegenwärtigen Untersuchung benutzten Mitteln vermögen wir nur die elektrische Kraft wahrzunehmen. Die Schwingungen derselben erfolgen bei verticaler Stellung der primären Schwingung unzweifelhaft in der durch den Strahl gelegten Verticalebene und fehlen in der Horizontalebene. Nach den Erfahrungen, welche wir an langsam veränderlichen Strömen machen, können wir aber nicht zweifeln, dass die elektrischen Schwingungen begleitet sind von Schwingungen magnetischer Kraft, welche in der durch den Strahl gelegten Horizontalebene stattfinden und Null werden in der Verticalebene. Die Polarisation des Strahles besteht also nicht sowohl darin, dass nur in der Verticalebene Schwingungen stattfinden, als vielmehr darin, dass die Schwingungen in der Verticalebene elektrischer, in der Horizontalebene magnetischer Natur sind. Die Frage schlechthin, in welcher von beiden Ebenen in unserem Strahl die Schwingung erfolge, ohne Angabe, ob man nach der elektrischen oder der magnetischen Schwingung frage, lässt eine Antwort nicht zu. Dass in dieser Uebersetzung auch die Resultatlosigkeit einer alten optischen Streitfrage begründet sei, ist wohl zuerst klar von Hrn. Kolaček<sup>1)</sup> ausgesprochen worden.

#### Reflexion.

Wir haben die Reflexion der Wellen von leitenden Flächen bereits durch die Interferenz der zurückgeworfenen Wellen mit den ankommenden nachgewiesen und auch in der Construction unserer Hohlspiegel bereits angewandt. Jetzt ist es uns aber

<sup>1)</sup> F. Kolaček, Wied. Ann. 84, p. 676, 1888.

auch möglich, die beiden Wellensysteme voneinander zu trennen. Ich stellte zunächst in einem grösseren Raume die beiden Hohlspiegel so nebeneinander, dass ihre Oeffnungen nach derselben Seite blickten, und dass ihre Axen auf einen etwa 3 m vor ihnen liegenden Punkt convergirt. Die Funkenstrecke des empfangenden Spiegels blieb selbstredend dunkel. Nunmehr stellte ich eine ebene verticale Wand aus dünnem Zinkblech von 2 m Höhe und 2 m Breite im Kreuzungspunkt der Axen so auf, dass sie senkrecht auf der Mittellinie der Axen stand. Ich erhielt einen lebhaften Funkenstrom, herrührend von dem von der Wand reflectirten Strahle. Der Funkenstrom erlosch, sobald die Wand um eine verticale Axe um etwa  $15^\circ$  nach der einen oder anderen Seite aus der richtigen Lage herausgedreht wurde, die Reflexion ist also eine regelmässige, nicht eine diffuse. Wurde die Wand von den Spiegeln entfernt, indem die Axen der letzteren auf die Wand convergent gehalten wurden, so nahmen die Funken sehr langsam ab. Ich vermochte noch Funken wahrzunehmen, als die Wand 10 m von den Spiegeln abstand, die Wellen also einen Weg von 20 m zu durchlaufen hatten. Diese Anordnung dürfte mit Vortheil verwandt werden, wenn es gilt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Luft mit anderen langsameren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, z. B. solchen durch Kabel, zu vergleichen.

Um eine Reflexion des Strahles unter einem von Null verschiedenen Einfallswinkel herzustellen, führte ich den Strahl in einem Saale parallel einer Seitenwand, welche durch eine Flügelthür durchbrochen war. In dem benachbarten Zimmer, zu welchem die Thür führte, stellte ich den empfangenden Hohlspiegel so auf, dass seine optische Axe die Mitte der Thür durchsetzte und senkrecht die Richtung des Strahles kreuzte. Wurde nun im Kreuzungspunkte die ebene leitende Wand vertical so aufgestellt, dass sie sowohl mit dem Strahl, als mit der Axe des empfangenden Spiegels einen Winkel von  $45^\circ$  bildete, so trat im secundären Leiter ein Funkenstrom auf, welcher auch durch das Schliessen der Thüre nicht unterbrochen wurde. Drehte ich die spiegelnde Wand um etwa  $10^\circ$  aus der richtigen Lage, so erloschen die Funken. Die Reflexion ist also eine regelmässige, und Einfalls- und Reflexionswinkel sind einander gleich. Dass der Weg der Wirkung von der Quelle der Er-

regung zum ebenen Spiegel und von dort zum secundären Leiter führt, konnte auch dadurch erwiesen werden, dass man auf die verschiedenen Punkte dieses Weges schattengebende Schirme stellte. Die secundären Funken erloschen alsdann stets, während eine beliebige Aufstellung der Schirme im übrigen Raume sie nicht schädigte. Mit Hülfe des kreisförmigen secundären Leiters ist es möglich, im Strahl die Lage der Wellenebene zu bestimmen, dieselbe fand sich vor und nach der Reflexion senkrecht zum Strahl, hatte also in der Reflexion eine Schwenkung um  $90^\circ$  ausgeführt.

Bisher standen die Brennpuncten der Hohlspiegel vertical, und die Schwingungsebene war also senkrecht auf der Einfallsebene. Um auch eine Reflexion zu erzeugen, bei welcher die Schwingungen in der Einfallsebene erfolgen, legte ich die Brennpuncten beider Hohlspiegel horizontal. Ich beobachtete die gleichen Erscheinungen wie in der bisherigen Lage und vermochte auch nicht einen Unterschied in der Intensität des reflectirten Strahles in beiden Fällen wahrzunehmen. Ist hingegen die Brennpunctlinie des einen der Spiegel vertical, die des anderen horizontal, so beobachtet man keine secundären Funken. Die Neigung der Schwingungsebene gegen die Einfallsebene wird also durch die Reflexion nicht geändert, sobald diese Neigung einen der beiden erwähnten bevorzugten Werthe hat; allgemein aber wird diese Behauptung nicht zutreffen. Es darf selbst als fraglich bezeichnet werden, ob der Strahl nach der Reflexion im allgemeinen noch geradlinig polarisirt sei. Die Interferenzen, welche die sich kreuzenden Wellensysteme vor dem Spiegel bilden, und welche, wie ich bemerkte, in dem kreisförmigen Leiter zu charakteristischen Erscheinungen Anlass geben, können vielleicht am ehesten auf die dem Optiker geläufigen Fragen nach Aenderung der Phase und der Amplitude durch die Reflexion Aufschluss geben.

Wir erwähnen noch eines Versuches über die Reflexion von elektrisch anisotropen Flächen. Die beiden Hohlspiegel wurden wieder nebeneinander aufgestellt, wie in dem zuerst beschriebenen Versuch über die Reflexion; ihnen gegenüber aber wurde jetzt als reflectirende Wand der erwähnte Schirm aus parallelen Kupferdrähten aufgestellt. Es zeigte sich, dass die secundäre Funkenstrecke dunkel blieb, wenn die Drähte die Richtung der

Schwingungen senkrecht durchschnitten, sich aber erhellte, sobald die Drähte in die Richtung der Schwingungen fielen. Die Analogie zwischen unserer einseitig leitenden Fläche und der Turmalinplatte beschränkt sich also auf den durchgelassenen Theil des Strahles.<sup>1)</sup> Der nicht hindurchgelassene Theil wird von der Turmalinplatte absorbirt, von unserer Fläche aber reflectirt. Kreuzt man in dem letztbeschriebenen Versuch die Brennnlinien der beiden Spiegel, so kann man durch Reflexion an einer isotropen Wand keine Funken im secundären Leiter hervorrufen; ich überzeugte mich aber, dass dies gelingt durch Reflexion an dem anisotropen Drahtgitter, wenn man nämlich dasselbe so aufstellt, dass die Richtung seiner Drähte gegen beide Brennnlinien unter  $45^\circ$  geneigt ist. Der Versuch findet nach dem Vorausgegangenen leicht seine Erklärung.

#### Brechung.

Um zu versuchen, ob eine Brechung des Strahles beim Uebertritt aus Luft in ein anderes isolirendes Medium nachzuweisen wäre, liess ich ein grösseres Prisma aus sogenanntem Hartpech, einer asphaltartigen Masse, herstellen. Die Grundfläche war ein gleichschenkliges Dreieck von 1,2 m Schenkellänge und einem brechenden Winkel von nahezu  $30^\circ$ . Die Höhe des ganzen Prismas, dessen brechende Kante vertical gestellt wurde, betrug 1,5 m. Da das Prisma aber ungefähr 12 Centner wog und als Ganzes zu schwer beweglich gewesen wäre, so war es aus drei übereinander gestellten Theilen von je 0,5 m Höhe zusammengesetzt. Die Masse war in Holzkisten eingegossen, welche, da sie sich nicht als schädlich erwiesen, um die Masse belassen wurden. Das Prisma wurde auf einer Unterlage in solcher Höhe aufgestellt, dass die Mitte seiner brechenden Kante in gleicher Höhe mit der primären und der secundären Funkenstrecke lag. Nachdem ich mich überzeugt, dass eine Brechung stattfindet und eine Schätzung über die Grösse derselben gewonnen hatte, stellte ich die Versuche in folgender Weise an: Der gebende Hohlspiegel wurde in 2,6 m Abstand vom Prisma gegen die eine brechende Fläche gewandt, so aufgestellt, dass die Mittellinie des Strahles möglichst genau auf den Schwer-

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 26 am Schluss des Buches.]

punkt des Prismas hinzielte und die brechende Fläche von der Seite der Hinterfläche her unter einem Winkel von  $65^\circ$  traf. Neben die brechende Kante des Prismas und neben die gegenüberliegende Seite wurden zwei leitende Schirme aufgestellt, welche dem Strahl jeden anderen Weg, als den durch das Prisma, abschnitten. Auf der Seite des durchgetretenen Strahles wurde auf den Boden um den Schwerpunkt der Prismenbasis als Mittelpunkt ein Kreis von 2,5 m Radius gezeichnet. In diesem wurde nun der empfangende Spiegel so herumbewegt, dass seine Öffnung beständig gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet blieb. Wurde der Spiegel zunächst in der Verlängerung des einfallenden Strahles aufgestellt, so waren in ihm Funken nicht zu erhalten, nach dieser Richtung warf das Prisma einen vollkommenen Schatten. Es traten aber Funken auf, wenn der Spiegel gegen die Hinterfläche des Prismas hin verschoben wurde, und zwar zuerst, wenn die im Kreise gemessene Winkelverschiebung aus der Anfangslage etwa  $11^\circ$  betrug. Der Funkenstrom nahm an Intensität zu bis zu einer Ablenkung von etwa  $22^\circ$ , um dann wieder abzunehmen. Die letzten Funken waren bemerklich bei einer Ablenkung von etwa  $34^\circ$ . Wurde der Spiegel in der Richtung der stärksten Wirkung aufgestellt und nun auf dem Radius des Kreises vom Prisma entfernt, so konnten die Funken auf einen Abstand von 5–6 m verfolgt werden. Ein Gehülfe, welcher sich vor oder hinter das Prisma stellte, liess die Funken unfehlbar verlöschen, ein Beweis, dass die Wirkung thatsächlich durch das Prisma, nicht auf anderem Wege zu dem secundären Leiter gelangte. Die Versuche wurden wiederholt, nachdem, ohne die Stellung des Prismas zu ändern, die Brennpunkte beider Spiegel horizontal gelegt worden waren. Eine Abweichung von den bisher beschriebenen Erscheinungen wurde dabei nicht bemerkt. Einem brechenden Winkel von  $30^\circ$  und einer Ablenkung von  $22^\circ$  in der Nähe des Minimums der Ablenkung entspricht der Brechungsexponent 1,69. Der optische Brechungsexponent wird für pechartige Körper zwischen 1,5 und 1,6 angegeben. Die Ungenauigkeit unserer Bestimmung und die Unreinheit des benutzten Stoffes lässt nicht zu, dass man der Grösse oder dem Sinn der Abweichung weitergehende Bedeutung beilege.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (Siehe Anmerkung 27 am Schluss des Buches.)

Wir haben die von uns untersuchten Gebilde als Strahlen elektrischer Kraft eingeführt. Nachträglich dürfen wir dieselben vielleicht auch als Lichtstrahlen von sehr grosser Wellenlänge bezeichnen. Mir wenigstens erschienen die beschriebenen Versuche in hohem Grade geeignet, Zweifel an der Identität von Licht, strahlender Wärme und elektrodynamischer Wellenbewegung zu beseitigen. Ich glaube, dass man nunmehr getrost die Vortheile wird ausnutzen dürfen, welche sich aus der Annahme dieser Identität sowohl für das Gebiet der Optik, als das der Elektrizitätslehre ziehen lassen.

Erläuterung der Abbildungen. — Um die Wiederholung und Erweiterung dieser Versuche zu erleichtern, füge ich in Fig. 35, 36, und 36, Abbildungen der von mir benutzten Apparate bei, obwohl dieselben ohne Rücksicht auf Dauerhaftigkeit nur für den augenblicklichen Versuch zusammengestellt waren. Fig. 35 stellt in Grundriss und Aufriss (Durchschnitt) den gebenden Spiegel dar. Man erkennt, dass das Gerüst desselben aus zwei horizontalen Rahmen von parabolischer Gestalt (*a, a*) und vier senkrechten Stützen (*b, b*) besteht, welche mit jenen Rahmen verschraubt sind und dieselben zugleich zusammenhalten und tragen. Das spiegelnde Blech ist zwischen die Rahmen und Stützen eingeklemmt und durch zahlreiche Schrauben gegen beide befestigt. Die Stützen stehen oben und unten über das Blech vor, um bei der Handhabung des Spiegels als Griffe benutzt zu werden. Fig. 36, stellt die

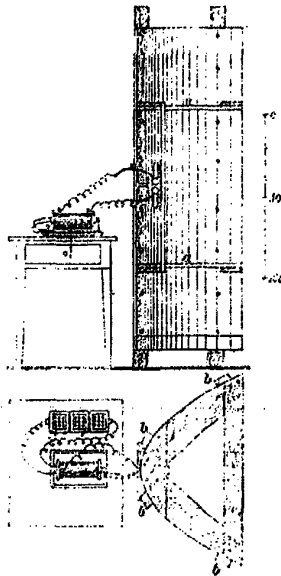


Fig. 35.

des Spiegels als Griffe benutzt zu werden. Fig. 36, stellt die

Einrichtung des primären Leiters in etwas grösserem Maassstabe dar. Die beiden Metalltheile gleiten mit Reibung in zwei Hülsen von starkem Papier, welche durch zwei Kautschukbänder geschlossen gehalten werden. Ihrerseits sind diese Hülsen durch vier Stützen von Siegellaack auf einem Brettchen befestigt, welches wiederum durch Kautschukbänder gegen eine auch in Fig. 35 sichtbare Holzleiste des Gerüsts gepresst wird. Die mit Gutta-percha überzogenen Zuleitungsdrähte münden in zwei Löchern, welche in die Kugeln des primären Leiters gebohrt sind. Die Vorrichtung gestattet den

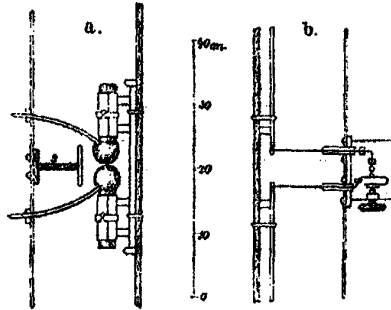


Fig. 36.

Theilen des Leiters die nothwendige Beweglichkeit gegeneinander und kann in wenigen Minuten auseinander genommen und wieder zusammengesetzt werden, was wegen des häufigen Aufpolirens der Polflächen nothwendig ist. Dort, wo die Zuleitungsdrähte den Spiegel durchsetzen, umkleiden sie sich während der Entladungen mit bläulichem Lichte. Um dasselbe von der Funkenstrecke, deren Erregungsfähigkeit es merklich schädigt, fern zu halten, ist der Schirm *s*, bestehend aus glattem Holze, angebracht. Fig. 36, endlich stellt die secundäre Funkenstrecke dar. Die beiden Theile des secundären Leiters sind wiederum durch Siegellaackstützen und Kautschukbänder an einer Leiste des Gerüsts befestigt. Von den inneren Enden dieser Theile aus sieht man die Zuleitungsdrähte, von Glasröhren umgeben, den Spiegel durchsetzen und sich einander zuwenden. Der obere Draht trägt als Pol eine kleine Kugel von Messing. An den unteren Draht ist ein Stück einer Uhrfeder gelöthet, welches den zweiten Pol, eine feine Spitze von Kupfer, trägt. Es ist absichtlich die Spitze aus weicherem Metall als die Kugel gewählt; ohne diese Vorsicht drückt sich leicht die Spitze in die Kugel ein, und die winzigen Fünkchen entziehen sich in dem entstehenden Grübchen

der Betrachtung. Man erkennt aus der Figur, in welcher Weise die Spitze durch eine Schraube bewegt wird, welche auf die Feder drückt, jedoch durch ein Glasplättchen von derselben isolirt ist. Die eigenthümliche Krümmung der Feder hat den Zweck, die Bewegung der Spitze noch feiner zu machen, als es die Benutzung der Schraube allein gestatten würde.

Ohne Zweifel lassen sich die hier beschriebenen Apparate in weitem Sinne abändern, ohne dass deshalb der Erfolg der Versuche ausbliebe. Auf befreundeten Rath habe ich auch versucht, im secundären Leiter die Funkenstrecke durch einen stromprüfenden Froschschenkel zu ersetzen; es scheint aber dieses unter anderen Verhältnissen so empfindliche Mittel unter den gegenwärtigen zu versagen.<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 23 am Schluss des Buches.]

## 12. Ueber die mechanischen Wirkungen elektrischer Drahtwellen.

(Wiedemanns Ann. 42, p. 407, 1891.)

Die Untersuchung der mechanischen Kräfte, welche ein Leiter im Inneren eines elektrischen Wellenzuges erfährt, erschien mir wünschenswerth aus verschiedenen Gründen. Erstens können diese Kräfte ein Mittel zur quantitativen Untersuchung solcher Wellen abgeben, falls sie sich mit hinreichender Stärke und Regelmässigkeit zur Beobachtung bringen lassen. Bisher hat zu quantitativen Bestimmungen fast nur die Wärmewirkung der Wellen gedient, welche in den Händen der Herren Rubens und Ritter<sup>1)</sup> vortreffliche Resultate gab, vor welcher aber die Beobachtung der mechanischen Kräfte in vielen Fällen den Vorzug grösserer Einfachheit besitzt. Zweitens erwartete ich in der Betrachtung der Art und Vertheilung der mechanischen Kräfte ein Mittel zu finden, um das Vorhandensein der magnetischen Kraft neben dem der elektrischen zu erweisen. In allen bisherigen Beobachtungen hat sich allein die elektrische Kraft offenbart<sup>2)</sup> und da zur Nachweisung der magnetischen Kraft die gewöhnlichen Mittel versagen, so erschien es nicht uninteressant, ein neues Mittel auf seine Brauchbarkeit zu prüfen. Drittens endlich — und dies war der eigentliche Zweck meiner Untersuchung — hoffte ich, die Beobachtungen an Wellen im freien Luftraume

<sup>1)</sup> H. Rubens u. R. Ritter, Wied. Ann. 40. p. 55. 1890.

<sup>2)</sup> Wenn ich selber früher gelegentlich von der Beobachtung der Knoten der magnetischen Wellen gesprochen habe, so war diese Ausdrucksweise nur durch die Theorie gerechtfertigt, nicht durch die Versuche gefordert.

anstellen zu können, unter Umständen also, unter welchen die etwa eintretenden Bewegungen nicht auf irgend welche Fernkräfte zurückgeführt werden könnten. Diese letztere Hoffnung wurde durch die Schwäche der Wirkung unter solchen Umständen vereitelt; ich musste mich begnügen, die Wirkung der in Drähten fortgeleiteten Wellen zu verfolgen, obwohl dabei das Interesse der Versuche in dem wichtigsten Punkte verloren ging. Die mechanischen Wirkungen der Drahtwellen kann und wird man ansehen als die Anziehungen der auf den Drähten sich ansammelnden Elektricitäten und der in denselben fließenden Ströme. Zu einer Entscheidung zwischen älteren und neueren Anschauungen können demnach die Versuche mit Drahtwellen nicht angezogen werden. Stellen wir uns freilich von vornherein auf den Standpunkt, von welchem aus die Drahtwellen nur als eine besondere Form der in Luft fortgeleiteten Wellen erscheinen, so ist es gleichgültig, an welcher von beiden Formen wir die Versuche anstellen.

#### 1. Das benutzte Wellensystem.

Nachdem ich verschiedene Anordnungen der Wellen geprüft und dabei in den wesentlichen Punkten übereinstimmende Resultate erhalten hatte, blieb ich bei der Anordnung Herrn Lecher's<sup>1)</sup> als der für reine Versuche geeignetsten stehen. Fig. 37 zeigt die Form derselben.

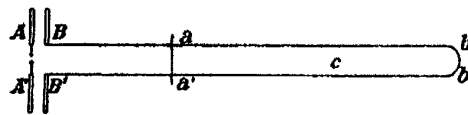


Fig. 37.

AA' ist derselbe Leiter, welcher früher stets als primärer Leiter verwendet wurde, bestehend aus zwei quadratischen Platten von 40 cm Seitenlänge und einem Verbindungsdraht von 60 cm, welcher die hier etwa 2 mm lange Funkenstrecke enthielt. Als Erreger diente ein kleines Inductorium, dessen grösste Funkenlänge nur 4 cm betrug, gespeist durch zwei Accumulatoren.

<sup>1)</sup> E. Lecher, Wied. Ann. 41. p. 850. 1890.

Die einzelne Entladung dieses kleinen Apparates war zwar weniger wirksam als die eines grossen Inductoriums, dieser Ausfall aber wurde durch die schnellere Folge der Entladungen mehr als compensirt. Den Platten  $A$  und  $A'$  stehen in 10 cm Abstand gegenüber die Platten  $B$  und  $B'$ , von welchen aus zwei parallele, etwa 30 cm voneinander entfernte Drähte bis auf eine Entfernung von 6,8 m fortlaufen, um sich dort zwischen  $b$  und  $b'$  miteinander zu vereinigen. In einer variablen Entfernung vom Ursprung bei  $aa'$  sind diese Drähte durch eine zweite Verbindung, die Brücke, miteinander in Verbindung gesetzt. Bei einer gewissen Einstellung dieser Brücke, etwa 1,2 m von  $BB$  entfernt, entsteht in dem Interval zwischen  $aa'$  und  $bb'$  eine sehr lebhaft Schwingung, welche die halbe Wellenlänge einer stehenden Welle darstellt und welche, wie Hr. Lecher nachgewiesen hat, erregt wird durch Resonanz zwischen dieser Schwingung selbst und der primären Schwingung, welche sich hier in dem Luft- raume zwischen  $AA'$  einerseits und  $Baa'B'$  andererseits ausbildet. Eine Verschiebung der Brücke vergrössert gleichzeitig die eine der beiden Schwingungsdauern und verkleinert die andere, daher die besondere Schärfe der Einstellung bei dieser Anordnung. Ausser ihren allgemeinen Vorzügen bietet dieselbe für unseren augenblicklichen Zweck noch eine Reihe besonderer Vortheile. Da die zu beobachtenden Kräfte sehr klein sind, so haben wir die denselben unterworfenen Leiter vor fremden elektrostatischen Einflüssen sorgfältig zu schützen. Dies ist in der benutzten Anordnung möglich, weil die Drähte, welche wir den Prüfungskörpern nothwendig nähern müssen, ein in sich zusammenhängendes Leitersystem darstellen. Umgeben wir in unseren Versuchen die wirksamen Theile mit einem Drahtnetz, welches wir mit den Knotenpunkten in  $aa'$  und  $bb'$  in Verbindung setzen, so ist ohne Störung der Schwingung der Schutz ein vollkommener. In dieser Weise wurde also in den Versuchen verfahren. Da ferner die Leiter, welche wir im Folgenden dem Einfluss der Kräfte unterwerfen, nicht wie die früher benutzten Resonatoren eine bestimmte Schwingung aus der gesammten Bewegung herauslesen, so erhalten wir von vornherein unübersichtliche Resultate, wenn wir nicht auf anderem Wege Sorge dafür tragen, eine reine Schwingung von bestimmter Wellenlänge und bekannter Lage der Knoten zu erregen. Bei der obigen Anordnung ist

dieser Bedingung genügt, es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die Punkte  $aa'$  und  $bb'$  Knotenpunkte sämtlicher zwischen ihnen erregten Schwingungen sind und dass unter diesen nur die längste Schwingung durch Resonanz verstärkt zu merklicher Höhe anschwillt. Dass wir uns mit der Untersuchung einer halben Wellenlänge begnügen, ist offenbar keine Beschränkung der Versuche. Endlich sind die Verhältnisse unserer Schwingung ziemlich unabhängig davon, ob die beiden Drähte geradlinig ausgespannt oder in beliebiger Weise gekrümmt nebeneinander verlaufen, in ähnlicher Weise wie es für die akustischen Schwingungen der Luft in Röhren nicht sehr wesentlich ist, ob die Röhren gerade oder gekrümmt sind. Wir können demnach mit Leichtigkeit unsere Schwingung in alle möglichen relativen Lagen zu dem in fester Lage gehaltenen Prüfungskörper bringen. In der That wurden die verschiedenen relativen Lagen stets durch Verschiebung der Drähte hergestellt, auch in den Fällen, in welchen im Folgenden so gesprochen wird, als habe man den Prüfungskörper verschoben.

## 2. Die elektrische Kraft.

Zur Messung der mechanischen Wirkung der elektrischen Kraft benutzte ich ein cylindrisches Röhrchen von Goldpapier von 5,5 cm Länge und 0,7 cm Durchmesser. Dasselbe war mit horizontaler Richtung der Axe an einem Coconfaden aufgehängt, ein sehr kleiner Magnet gab dem Röhrchen eine feste Ruhelage, ein kleiner Spiegel gestattete die Ablenkungen aus derselben zu messen. Das ganze System hing in einem Glaskästchen. Fig. 38 giebt ein Bild des kleinen Apparates. Wurde derselbe der Wirkung der Schwingung unterworfen, so suchte sich die Nadel in die mittlere Richtung der elektrischen Kraft einzustellen und Ablenkungen aus der Ruhelage erfolgten. Um denselben grössere Werthe zu ertheilen, näherte ich in der Nähe des Apparates die beiden Drähte einander und dem Prüfungskörper bis auf einige Centimeter und verstärkte sie gegenüber den Enden des letzteren durch kleine Platten, wie es für einen besonderen Fall in der Figur angedeutet ist. Unter diesen Verhältnissen waren erste Ausschläge von 100 Scalentheilen und grössere zu erhalten. Die Regelmässigkeit, mit welcher diese ersten Ausschläge erfolgten, war befriedigend; bei mehrfacher Wiederholung desselben Versuches wichen die Einzelresultate nur um wenige Procent von-

einander ab. Die Unterschiede der einzelnen Entladungen dürften viel grösser sein, aber der Ausschlag der Nadel giebt schon die mittlere Wirkung von sehr vielen Entladungen. Als Beispiele für die Brauchbarkeit dieser Ablenkungen zu messenden Versuchen führe ich zwei Beobachtungsreihen an. Durch die erste derselben sollte die Wirksamkeit der Resonanz zur Anschauung gebracht werden. Der Apparat wurde bei  $c$  im Bauche der Schwingung aufgestellt, die Drähte  $ab$  und  $a'b'$  wurden in der Weise demselben genähert, wie es Fig. 38 angiebt. Nun wurde die Brücke  $aa'$  in verschiedenen Entfernungen  $e$  vom Ursprung  $BB'$  der Drahtleitung aufgelegt, der Inductionsapparat in Thätigkeit gesetzt und die Grösse  $i$  des ersten Ausschlages gemessen. Die zusammengehörigen Werthe von  $e$  und  $i$  in der Nähe des Maximums waren:

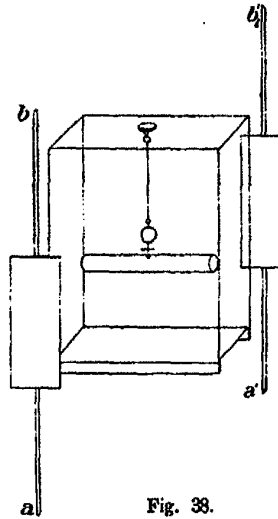


Fig. 38.

$e =$	80	90	100	110	120	130	140	150	160	cm
$i =$	5,3	10,0	21,8	51,2	44,1	19,3	10,3	5,7	4,2	Sech.

Trägt man die Ausschläge graphisch auf, so sieht man, dass dieselben einen regelmässigen Verlauf und ein ausgesprochenes Maximum zwischen 110 und 120 cm zeigen. In der That erreichten die Ausschläge ihren grössten Werth  $i = 60,6$  Scalenth. bei  $e = 114$  cm.

Die zweite Beobachtungsreihe sollte die Abnahme der Intensität der Schwingung vom Bauche  $c$  gegen den Knoten  $b$  hin veranschaulichen. Zu dem Ende wurde diese Strecke in 12 gleiche Abschnitte getheilt und der Apparat in die 13 Endpunkte dieser Abschnitte eingeschaltet. Es wurden die folgenden ersten Ausschläge  $i$  erhalten:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$=$	80,5	80,5	79,0	77,0	65,6	57,8	50,0	33,5	27,5	17,5	7,0	1,0	0

Auch diese Werthe zeigen einen hinreichend glatten Verlauf, um darnach die Form der Schwingung beurtheilen und sich überzeugen zu können, dass dieselbe von einer einfachen Sinusschwingung merklich abweicht.

Andere Versuche, welche ich anstellte, betrafen die Richtung der elektrischen Kraft in der Nachbarschaft der Drähte überhaupt; diese Versuche ergaben keine Thatsachen, welche nicht bereits vorher als feststehend gelten konnten. In dem Zwischenraume der Drähte suchte sich die Nadel in die kürzeste Verbindungslinie der Drähte einzustellen, ausserhalb dieses Zwischenraumes strebte sie die Richtung auf den nächstgelegenen Draht hin anzunehmen. Es wurden also stets die Enden des Röhrchens von den nächstgelegenen Theilen der Drähte scheinbar angezogen.

### 3. Die magnetische Kraft.

Zum Nachweis der magnetischen Kraft diente ein kreisförmiger Reif von Aluminiumdraht. Der Durchmesser des Reifs betrug 65 mm, der des Drahtes 2 mm. Der Reif wurde um einen seiner Durchmesser drehbar aufgehängt, und wie vorher der Cylinder mit Magnet, Spiegel und Glasgehäuse versehen. Fig. 39 giebt eine Skizze des nunmehr benutzten Apparates.

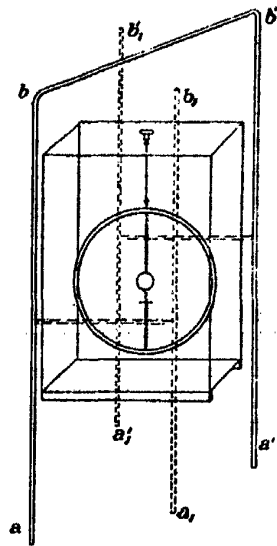


Fig. 39.

Sehen wir zunächst für einen Augenblick von unserer Kenntniss der magnetischen Kraft ab, so werden wir vermuthen, dass sich der Reif unter dem Einfluss der Schwingung ebenso wie der Cylinder verhält, und dass dabei die Richtung der grössten Entfernungen von der Drehungsaxe, also der horizontale Durchmesser des Reifs die Rolle der Längsaxe des Cylinders übernimmt. Wir werden also vermuthen, dass die Endpunkte des horizontalen Durchmessers überall von den

nächstgelegenen Theilen der wellentragenden Drähte angezogen werden, dass diese Wirkung am grössten ist im Bauche der Schwingung und wegfällt in der Nähe der Knoten, woselbst die elektrische Kraft verschwindet. Hängen wir nun aber wirklich den Reif in dem Knoten  $bb'$  auf, in der Weise, wie es die Fig. 39 angiebt, so sehen wir andere, unerwartete Erscheinungen eintreten. Erstens bleibt unter dem Einfluss der Schwingung der Ring nicht in Ruhe, sondern nimmt Ablenkungen an von derselben Grössenordnung wie diejenigen, welche der Cylinder im Bauche der Schwingung zeigte. Zweitens zeigt die Richtung der Ablenkung keine Anziehung, sondern eine Abstossung der benachbarten Punkte des Reifes und der Drähte an. Dass die Abstossung eine Folge der Schwingung selbst ist, geht daraus hervor, dass sich ihre Grösse nach dem gleichen Gesetze durch die Resonanz bestimmt erweist, wie die der elektrischen Wirkung. Belassen wir den Reif im Innern der Drahtschleife  $bb'$ , ändern aber im übrigen die relative Lage der letzteren gegen ersteren, so finden wir, dass der horizontale Durchmesser stets und von allen Seiten einer Richtung zustrebt, welche auf der Ebene der Drahtschleife senkrecht steht.

Ohne anderweitig gewonnene Kenntniss, allein aus diesen Versuchen dürfen wir also aussagen, dass sich neben der elektrischen Schwingung noch eine Schwingung anderer Art geltend mache, deren Knotenpunkte nicht mit jener der elektrischen Schwingung zusammenfallen, dass diese Schwingung, wie die elektrische sich durch eine gerichtete Zustandsänderung des Raumes bemerkbar mache, dass aber die charakteristische Richtung der neuen Schwingung auf der der elektrischen senkrecht stehe.

In Wahrheit werden wir, über die Beobachtung hinausgehend, die neue Schwingung ohne weiteres mit der von der Theorie geforderten magnetischen Schwingung identifiziren. Die schnell wechselnde magnetische Kraft muss in dem geschlossenen Reif einen in gleichem Rythmus wechselnden Strom induciren und auf diesen zurückwirkend den Reif ablenken. Die magnetische Kraft hat ihren grössten Werth im Knoten der elektrischen Schwingung und ihre Richtung ist daselbst senkrecht auf der Ebene der Drahtschleife. Dass sie eine Abstossung der benachbarten Theile des Reifes und der festen Drähte bewirken muss, erkennen wir am schnellsten, wenn wir sie als die Wirkung

der in diesen Bahnen umlaufenden Ströme betrachten. Der in dem Reif inducirte Strom muss im Inneren des Reifes beständig den Einfluss der inducirenden Strömung aufheben, also dieser in jedem Augenblicke entgegengerichtet sein, demnach von ihr abgestossen werden.

Alle weiteren Bewegungserscheinungen, welche man an dem aufgehängten Reif wahrnimmt, fügen sich ohne Zwang der gegebenen Erklärung. Complicationen treten unter Umständen ein. Belassen wir zum Beispiel die Anordnung in dem Zustande, welchen Fig. 39 uns anliebt, entfernen dabei aber den Reif von dem Knoten  $bb'$  gegen den Bauch der Schwingung hin, so nimmt die Abstossung sehr schnell ab, wird in einiger Entfernung Null und geht dann in eine Anziehung über, welche bis zur Erreichung des Wellenbauches zunimmt. In einem besonderen Falle betrug zum Beispiel die Abstossung bei  $bb'$  20 Scalentheile, verschwand in einer Entfernung von 95 cm vom Ende und ging in eine Anziehung über, deren Maximalwerth durch 44 Scalentheile gemessen wurde. Offenbar erklärt sich dieser Verlauf nicht aus dem Verhalten der magnetischen Kraft allein, sondern aus dem Zusammentreffen derselben mit der elektrischen Kraft, von welchen die letztere bei  $c$ , die erstere bei  $bb'$  bedeutend überwiegt. Wir können diese Vermuthung bestätigen und den Verlauf der magnetischen Schwingung verfolgen, indem wir die elektrische Kraft eliminiren. Zu dem Ende stellen wir parallel den Drähten  $ab$  und  $a'b'$  zwei weitere, aber nur etwa 20 cm lange Drähte in solcher Lage auf, dass dieselben symmetrisch zu den Drähten  $ab$  und  $a'b'$  in Bezug auf die Ruhelage des Reifes liegen, wie es die punktirten Linien  $a_1b_1$  und  $a'_1b'_1$  der Fig. 39 angeben. Wir verbinden  $ab$  mit  $a_1b_1$  und  $a'b'$  mit  $a'_1b'_1$ . Hierdurch ist offenbar die elektrische Wirkung fast aufgehoben, die magnetische nur wenig beeinträchtigt. In der That beobachten wir nunmehr in allen Entfernungen eine Abstossung des beweglichen Ringes von den festen Drähten. Diese Abstossung nimmt von den Enden der Schwingung gegen ihre Mitte hin beständig ab und erreicht dort ein Minimum, in dem erwähnten Beispiel ein solches von 4 Scalentheilen. Wäre die elektrische Schwingung eine reine Sinusschwingung, so müsste in ihrem Bauche die magnetische Kraft verschwinden; schon aus der Vertheilung der elektrischen Kraft sahen wir, dass diese ein-

fache Voraussetzung nicht genau zutrifft, und so können wir auch den Rest der magnetischen Kraft im Bauche der Schwingung wohl verstehen.

Die mechanischen Wirkungen der elektrischen und der magnetischen Kraft erweisen sich, wie es der Theorie entspricht, im allgemeinen von gleicher Grössenordnung; das Ueberwiegen der einen oder der anderen in jedem besonderen Falle ist wesentlich von den Verhältnissen der nächstbenachbarten Theile des Ringes und der festen Leitungen bedingt. Je mehr sich dieselben verschwindend dünnen Drähten nähern, desto mehr vermag die magnetische Kraft zur Geltung zu kommen, je breitere Flächen sich dieselben zuwenden, desto mehr wird die magnetische von der elektrischen Kraft in den Hintergrund gedrängt. Schon aus den einfachen Beispielen von Leiterformen, welche wir zur näheren Untersuchung herausgehoben haben, geht hervor, dass ein beliebig gestalteter Leiter im Innern eines elektromagnetischen Wellenzuges verwickelte und nicht immer leicht verständliche Bewegungsantriebe erfahren muss.

---

### 13. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

(Göttinger Nachr. v. 19. März 1890. Wiedemanns Ann. 40, p. 577.)

Das System von Begriffen und Formeln, durch welches Maxwell die elektromagnetischen Erscheinungen darstellte, ist in seiner möglichen Entwicklung reicher und umfassender, als ein anderes der zu gleichem Zwecke ersonnenen Systeme. Es ist gewiss wünschenswerth, dass ein der Sache nach so vollkommenes System auch der Form nach möglichst ausgebildet werde. Der Aufbau des Systems sollte durchsichtig seine logischen Grundlagen erkennen lassen; alle unwesentlichen Begriffe sollten aus demselben entfernt und die Beziehungen der wesentlichen Begriffe auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt sein. Die eigene Darstellung Maxwell's bezeichnet in dieser Hinsicht nicht das erreichbare Ziel, sie schwankt häufig hin und her zwischen den Anschauungen, welche Maxwell vorfand, und denen, zu welchen er gelangte. Maxwell geht aus von der Annahme unvermittelter Fernkräfte, er untersucht die Gesetze, nach welchen sich unter dem Einfluss solcher Fernkräfte die hypothetischen Polarisationen des dielektrischen Aethers verändern und er endet mit der Behauptung, dass diese Polarisationen sich wirklich so verändern, ohne dass in Wahrheit Fernkräfte die Ursachen derselben seien.<sup>1)</sup> Dieser Gang hinter-

---

<sup>1)</sup> Die gleiche Bemerkung trifft die durch v. Helmholtz im 72. Bd. des Crelle'schen Journals gegebene Ableitung, nicht zwar allgemein, aber doch für diejenigen besonderen Werthe der Constanten, welche in den Endresultaten die Fernkräfte verschwinden lassen, welche also auf die hier vertretene Theorie führen.

lässt das unbefriedigende Gefühl, als müsse entweder das schliessliche Ergebniss oder der Weg unrichtig sein, auf welchem es gewonnen wurde. Auch lässt dieser Gang in den Formeln eine Anzahl überflüssiger, gewissermaassen rudimentärer Begriffe zurück, welche ihre eigentliche Bedeutung nur in der alten Theorie der unvermittelten Fernwirkung besaßen. Als solche rudimentäre Begriffe physikalischer Natur nenne ich die dielektrische Verschiebung im freien Aether, unterschieden von der erzeugenden elektrischen Kraft und das Verhältniss beider, die Dielektricitätsconstante des Aethers. Diese Unterscheidungen haben Sinn, wenn wir aus einem Raum den Aether entfernen, die Kraft aber in demselben bestehen lassen können. Nach der Anschauung, von welcher Maxwell ausging, war dies denkbar, es ist nicht denkbar nach der Anschauung, zu welcher seine Arbeiten uns geführt haben. Als eine rudimentäre Erscheinung mathematischer Natur nenne ich das Vorherrschen des Vectorpotentials in den Grundgleichungen. Bei dem Aufbau der neuen Theorien dienten die Potentiale als Gerüst, indem durch ihre Einführung die un stetig an einzelnen Punkten auftretenden Fernkräfte ersetzt wurden durch Grössen, welche in jedem Punkte des Raumes nur durch die Zustände der benachbarten Punkte bedingt sind. Nachdem wir aber gelernt haben, die Kräfte selber als Grössen der letzteren Art anzusehen, hat ihr Ersatz durch Potentiale nur dann einen Zweck, wenn damit ein mathematischer Vortheil erreicht wird. Und ein solcher scheint mir mit der Einführung des Vectorpotentials in die Grundgleichungen nicht verbunden, in welchen man ohnehin erwarten darf, Beziehungen zwischen Grössen der physikalischen Beobachtung, nicht zwischen Rechnungsgrössen zu finden.

Die erwähnten Unvollkommenheiten der Form erschweren auch die Anwendung der Maxwell'schen Theorie auf besondere Fälle. Aus Anlass solcher Anwendungen habe ich mich seit längerer Zeit bemüht, die Maxwell'schen Formeln zu sichten und versucht, die wesentliche Meinung derselben von der zufälligen Form, in welcher sie zuerst auftraten, abzulösen. Das Folgende ist die geordnete Zusammenstellung meiner Ergebnisse. In gleicher Richtung hat bereits seit 1885 Hr. Oliver Heaviside gearbeitet. Die Begriffe, welche er aus den Maxwell'schen Gleichungen fortschafft, sind dieselben, welche auch ich

fortschaffe; die einfachste Form, welche diese Gleichungen dadurch annehmen,<sup>1)</sup> ist, von Nebendingen abgesehen, die gleiche, zu welcher auch ich gelange. In dieser Hinsicht also gehört Hrn. Heaviside die Priorität. Trotzdem wird man, hoffe ich, die folgende Darstellung nicht für überflüssig halten. Eine endgültige Darstellung beansprucht dieselbe nicht zu sein, sondern nur eine solche, an welche sich leichter weitere Verbesserungen anknüpfen lassen, als an die bisher gegebenen Darstellungen.

Ich theile den Stoff in zwei Theile. In dem ersten Theile A gebe ich die Grundbegriffe und die sie verknüpfenden Formeln. Es werden den Formeln Erläuterungen hinzugefügt werden, aber diese Erläuterungen sollen nicht Beweise der Formeln sein. Die Aussagen werden vielmehr als Erfahrungsthatfachen gegeben, und die Erfahrung soll als ihr Beweis gelten. Allerdings lässt sich einstweilen nicht jede einzelne Formel besonders durch die Erfahrung prüfen, sondern nur das System als Ganzes. Mit dem Gleichungssystem der gewöhnlichen Mechanik liegt ja die Sache kaum anders. In dem zweiten Theile B gebe ich an, in welcher Weise die Thatfachen der unmittelbaren Wahrnehmung systematisch aus den Formeln abgeleitet werden können, durch welche Erfahrungen sich also die Richtigkeit des Systems erweist. Ausführlich behandelt würde dieser Theil einen sehr grossen Umfang annehmen, es kann sich hier daher nur um Andeutungen handeln.

#### A. Die Grundbegriffe und ihr Zusammenhang.

##### 1. Elektrische und magnetische Kraft.

Das Innere aller Körper, den freien Aether eingeschlossen, kann von der Ruhe aus Störungen erfahren, welche wir als elektrische, und andere Störungen, welche wir als magnetische bezeichnen. Das Wesen dieser Zustandsänderungen kennen wir nicht, sondern nur die Erscheinungen, welche ihr Vorhandensein hervorruft. Diese letzteren sehen wir als bekannt an, mit ihrer

<sup>1)</sup> Diese Gleichungen findet man im Phil. Mag. Febr. 1888. Dasselbst wird auf frühere Arbeiten im Electrician 1885 Bezug genommen, welche Quelle mir unzugänglich gewesen ist.

Hilfe bestimmen wir die geometrischen Verhältnisse der Zustandsänderungen selbst. Die Störungen der elektrischen und der magnetischen Art sind so miteinander verknüpft, dass Störungen der einen Art unabhängig von denen der anderen dauernd zu bestehen vermögen, dass dagegen Störungen keiner der beiden Arten zeitliche Schwankungen erleiden können, ohne dadurch zugleich Störungen der anderen Art hervorzurufen. Die Erzeugung des geänderten Zustandes erfordert den Aufwand von Energie; diese Energie wird beim Verschwinden der Störung wieder ersetzt; das Vorhandensein der Störung stellt also einen Vorrath von Energie dar. In einem und demselben Punkte können sich die Zustandsänderungen einer jeden Art unterscheiden nach Richtung, Sinn und Grösse. Es ist also zur Bestimmung sowohl des elektrischen als des magnetischen Zustandes die Angabe einer gerichteten Grösse oder der drei Componenten einer solchen notwendig. Es ist aber eine erste wichtige Voraussetzung unserer gegenwärtigen Theorie, dass die Angabe einer einzigen Richtungsgrösse auch hinreichend sei, um die betreffende Aenderung vollständig zu bestimmen. Gewisse Erscheinungen, z. B. die des permanenten Magnetismus, der Dispersion u. s. w. lassen sich von diesem Standpunkte aus nicht verstehen, sondern erfordern, dass die elektrischen, bezw. magnetischen Zustände eines jeden Punktes durch mehr als eine Variable<sup>1)</sup> dargestellt werden. Solche Erscheinungen treten eben darum aus dem Rahmen unserer Betrachtung in ihrem gegenwärtigen Umfange heraus.

Diejenige Richtungsgrösse, durch welche wir zunächst den elektrischen Zustand bestimmen, nennen wir die elektrische Kraft. Die Erscheinung, durch welche wir sie definiren, ist die mechanische Kraft, welche ein bestimmter elektrisirter Körper im elektrisch gestörten leeren Raume erfährt. Für den leeren Raum selbst wollen wir nämlich die Componente der elektrischen Kraft in beliebiger Richtung proportional setzen der gleichgerichteten Componente jener mechanischen Kraft. Unter elektrischer Kraft in einem Punkte eines ponderablen Körpers verstehen wir die elektrische Kraft, welche an dem betreffenden Punkte im Innern eines unendlich kleinen, unendlich gestreckten

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 29 am Schluss des Buches.]

cylindrischen Hohlraumes sich findet, den wir in solcher Richtung in den Körper gebohrt haben, dass seine Richtung mit derjenigen der Kraft übereinstimmt, — eine Anforderung, welcher erfahrungsmässig stets genügt werden kann. In welcher Beziehung auch immer die so gemessene Kraft zu der wirklichen Zustandsänderung des Körpers steht, sicherlich muss sie dieselbe gemäss unserer Voraussetzung eindeutig bestimmen. Setzen wir überall an Stelle des Wortes „elektrisch“ das Wort „magnetisch“ und an Stelle des elektrisirten Hilfskörpers den Pol einer Magnetnadel, so erhalten wir die Definition der magnetischen Kraft. Um den Sinn beider Kräfte in der conventionellen Weise festzulegen, bestimmen wir noch, dass der elektrisirte Hilfskörper mit Glaselektricität geladen und dass derjenige Pol der Magnetnadel benutzt werde, welcher nach Norden weist. Die Einheiten der Kräfte sind noch vorbehalten. Die Componenten der elektrischen Kraft in Richtung der  $x, y, z$  bezeichnen wir mit  $X, Y, Z$ , die gleichgerichteten Componenten der magnetischen Kraft mit  $L, M, N$ .

## 2. Die Energie des Feldes.

Der elektrische Energievorrath eines Körpervolumens, in welchem die elektrische Kraft einen constanten Werth hat, ist eine homogene, quadratische Function der drei elektrischen Kraftcomponenten. Die entsprechende Aussage gilt für den Vorrath an magnetischer Energie. Den gesammten Energievorrath bezeichnen wir als den elektromagnetischen, er ist die Summe des elektrischen und des magnetischen.

Für einen isotropen Körper ist hiernach die Energiemenge jeder Art, berechnet auf die Volumeneinheit gleich dem Product aus dem Quadrat der betreffenden Gesamtkraft und einer Constanten. Die Grösse der letzteren kann verschieden sein für die elektrische und die magnetische Energie, sie hängt ab von dem Stoffe des Körpers und von der Wahl der Einheiten für die Energie und für die Kräfte. Die Energie wollen wir in absolutem Gaussischen Maasse messen und die Einheiten der Kräfte nunmehr festsetzen durch die Bestimmung, dass im freien Aether der Werth der Constanten gleich  $1/8\pi$  werden soll, dass also sein soll die Energie der Volumeneinheit des gestörten Aethers gleich:

$$\frac{1}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2).$$

Messen wir die Kräfte in dieser Weise, so sagen wir, dass wir sie in absolutem Gaussischen Maasse messen.<sup>1)</sup> Die Dimension der elektrischen Kraft wird dieselbe wie die der magnetischen, beide werden von solcher Art, dass ihr Quadrat die Dimension einer Energie in der Volumeneinheit hat, sie werden also in der üblichen Bezeichnungsweise gleich:  $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$ .

Für jeden isotropen ponderablen Körper können wir nun nach dem Bisherigen setzen die Energie der Volumeneinheit gleich:

$$\frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2).$$

Die neu eingeführten Constanten  $\epsilon$  und  $\mu$  sind nothwendig positive reine Zahlen. Wir nennen  $\epsilon$  die Dielektritätsconstante,  $\mu$  die Magnetisierungsconstante des Stoffes. Offenbar sind  $\epsilon$  und  $\mu$  Verhältnisszahlen, durch welche wir die Energie eines Stoffes vergleichen mit der Energie eines anderen Stoffes. Aus der Natur eines Stoffes allein geht ein bestimmter Werth derselben nicht hervor. Dies meinen wir, wenn wir sagen, Dielektritäts- und Magnetisierungsconstante seien keine inneren Constanten eines Stoffes. Es ist nicht unrichtig, wenn wir sagen, diese Constanten seien gleich Eins für den Aether, aber es enthält diese Behauptung keine Thatsache der Erfahrung, sondern eine willkürliche Festsetzung unsererseits.

Für krystallinische Körper wird die Energie der Volumeneinheit gleich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} (\epsilon_{11} X^2 + \epsilon_{22} Y^2 + \epsilon_{33} Z^2 + 2\epsilon_{12} XY + 2\epsilon_{23} YZ + 2\epsilon_{13} XZ) \\ & + \frac{1}{8\pi} (\mu_{11} L^2 + \mu_{22} M^2 + \mu_{33} N^2 + 2\mu_{12} LM + 2\mu_{23} MN + 2\mu_{13} LN). \end{aligned}$$

Durch bestimmte Wahl der Axen lässt sich der eine oder der andere Theil dieses Ausdruckes in eine Summe von drei Quadraten transformiren. Es ist wohl wahrscheinlich, dass dieselbe Wahl der Axen für den einen wie für den anderen Theil diesen Dienst leistet. Die  $\epsilon$  und  $\mu$  müssen von solcher Beschaffenheit

<sup>1)</sup> Siehe H. Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 42. 1882.

sein, dass bei der Transformation in eine Quadratsumme alle Coëfficienten positiv werden.

### 3. Zusammenhang der Kräfte im Aether.

Wir nehmen an, dass das benutzte Coordinatensystem der  $x, y, z$  von solcher Beschaffenheit ist, dass, wenn die Richtung der positiven  $x$  von uns aus nach vorn, die der positiven  $y$  von uns aus nach oben geht, alsdann die  $z$  von links nach rechts hin wachsen. Unter dieser Voraussetzung sind die elektrischen und magnetischen Kräfte im Aether miteinander verknüpft nach folgenden Gleichungen:

$$(3_a) \begin{cases} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{cases} \quad (3_b) \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}; \end{cases}$$

zu welchen die ihnen nicht widersprechenden Gleichungen:

$$(3_c) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

als eine den Aether von der ponderablen Materie auszeichnende Ergänzung hinzutreten.

Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmässig, dieselben aus Vermuthungen über die elektrische und magnetische Constitution des Aethers und das Wesen der wirkenden Kräfte, als wären dies bekanntere Dinge, herzuleiten, wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde. Viel eher ist es zweckmässig, an diese Gleichungen die weiteren Vermuthungen über die Constitution des Aethers anzuknüpfen.

Da die Dimensionen der  $L, M, N$  und der  $X, Y, Z$  die gleichen sind, so ist die Constante  $A$  eine reciproke Geschwindigkeit. Sie ist in Wahrheit eine innere Constante des Aethers; wir wollen damit sagen, dass ihre Grösse weder von dem Vorhandensein eines anderen Körpers, noch von willkürlichen Festsetzungen unsererseits abhängig ist.

Wir multipliciren unsere Gleichungen sämmtlich mit  $(1/4\pi A) \cdot d\tau$ , ferner einzeln der Reihe nach mit bez.  $L, M, N$ ,

$X, Y, Z$  und addiren sie sämmtlich. Wir integriren beide Seiten der entstehenden Gleichung über einen beliebig begrenzten Raum, dessen Oberflächenelement  $d\omega$  mit den Coordinatenachsen die Winkel  $n, x, n, y, n, z$  bildet. Rechts lässt sich die Integration ausführen und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{1}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \{ (NY - MZ) \cos n, x + (LZ - NX) \cos n, y \\ & \quad + (MX - LY) \cos n, z \} d\omega. \end{aligned}$$

Das links stehende Integral ist die elektromagnetische Energie des Raumes; die Gleichung giebt uns also die Aenderung dieser Energie, ausgedrückt durch Grössen, welche sich allein auf die Oberfläche des Raumes beziehen.

#### 4. Isotrope Nichtleiter.

In homogenen isotropen Nichtleitern verlaufen die Erscheinungen qualitativ vollkommen wie im freien Aether. Quantitativ sind Unterschiede insofern vorhanden, als erstens die innere Constante einen anderen Werth hat als im Aether, und als zweitens der Energievorrath der Volumeneinheit in der bereits angegebenen Weise die Constanten  $\epsilon$  und  $\mu$  enthält. Wir entsprechen diesen Aussagen und genügen der Erfahrung, indem wir setzen:

$$(4_a) \begin{cases} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{cases} \quad (4_b) \begin{cases} A\epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A\epsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A\epsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Denn wenn wir für einen Augenblick in dem Nichtleiter das Maass der Kräfte so bestimmen, wie wir es im Aether gethan haben und demgemäss für  $X, Y, Z$  einführen  $X/\sqrt{\epsilon}, Y/\sqrt{\epsilon}, Z/\sqrt{\epsilon}$ , und für  $L, M, N$  einführen  $L/\sqrt{\mu}, M/\sqrt{\mu}, N/\sqrt{\mu}$ , so nehmen die Gleichungen genau die Form der Gleichungen des Aethers an, mit dem einzigen Unterschiede, dass an Stelle der Grösse  $A$  die Grösse  $A/\sqrt{\epsilon\mu}$  tritt. Behalten wir auf der anderen Seite

unser Maass der Kräfte bei, so können wir widerspruchsfrei der Energie den geforderten Werth beilegen. Denn die Ausführung der gleichen Operation, welche wir im vorigen Abschnitt anwandten, ergibt uns hier:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \left\{ (NY - MZ) \cos n, x + (LZ - NX) \cos n, y \right. \\ & \quad \left. + (MX - LY) \cos n, z \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Die allgemeinen Aussagen, durch welche wir uns auf unsere Gleichungen haben führen lassen, versagen, wenn wir den Nichtleiter nicht mehr als homogen betrachten. Es fragt sich also, ob in diesem Falle unsere Gleichungen noch gelten. Die Erfahrung beantwortet diese Frage in bejahendem Sinne; wir können also in den Gleichungen (4<sub>a</sub>) und (4<sub>b</sub>) die Grössen  $\epsilon$  und  $\mu$  als von Punkt zu Punkt veränderlich betrachten.

##### 5. Krystallinische Nichtleiter.

Eine Darstellung der Vorgänge in solchen Körpern, welche nach verschiedener Richtung verschieden entwickelt sind, deren elektromagnetische Eigenschaften aber bei verschwindendem Anisotropismus in die der isotropen Nichtleiter übergehen, erhalten wir, wenn wir die in unseren Gleichungen links stehenden zeitlichen Aenderungen der Kräfte als ganz allgemeine lineare Functionen der rechts stehenden räumlichen Aenderungen der Kräfte entgegengesetzter Art betrachten. Die Allgemeinheit der Form dieser linearen Functionen und die Auswahl ihrer Constanten wird indessen beschränkt durch die Vermutung, dass dieselbe Operation, welche uns bisher eine Gleichung für die Aenderung der Energie lieferte, dies allgemein thun wird, und durch die Forderung, dass dabei die Energie selbst die bereits festgestellte Form annehmen muss. Durch diese Ueberlegungen werden wir auf die folgenden Gleichungen hingeletet, welche in der That zur Darstellung der wichtigsten Erscheinungen genügen:

$$\begin{aligned}
 (5_a) \quad & \begin{cases} A \left( \mu_{11} \frac{dL}{dt} + \mu_{12} \frac{dM}{dt} + \mu_{13} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \left( \mu_{12} \frac{dL}{dt} + \mu_{22} \frac{dM}{dt} + \mu_{23} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \left( \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{cases} \\
 (5_b) \quad & \begin{cases} A \left( \epsilon_{11} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{12} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{13} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \left( \epsilon_{12} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{22} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \left( \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Gleichung für die Aenderung der Energie eines Raumes ergibt das gleiche Resultat wie in Abschnitt 3 und 4. Auch in den Gleichungen des gegenwärtigen Abschnittes ist es erfahrungsmässig nicht nöthig, die  $\epsilon$  und  $\mu$  als constant in Hinsicht des Raumes anzusehen, vielmehr können dieselben beliebig von Punkt zu Punkt veränderliche Grössen sein.

#### 6. Vertheilung der Kräfte in Leitern.

In den Körpern, welche wir bisher betrachteten, erscheint jede Aenderung der elektrischen Kraft als bedingt durch das Vorhandensein magnetischer Kräfte. Sind in einem endlichen Bereich die magnetischen Kräfte gleich Null, so fällt jede Ursache für eine solche Aenderung fort und eine vorhandene Vertheilung elektrischer Kraft bleibt sich selbst überlassen dauernd bestehen, solange nicht von den Grenzen des Bereiches her eine Störung das Innere trifft. Nicht in allen Körpern zeigen die elektrischen Kräfte dies Verhalten. In vielen Körpern schwindet eine sich selbst überlassene elektrische Kraft mehr oder weniger schnell dahin; in solchen Körpern sind magnetische Kräfte oder andere Ursachen erforderlich, um eine vorhandene Vertheilung vor der Veränderung zu bewahren. Solche Körper bezeichnen wir aus Gründen, die später hervortreten, als Leiter. Die einfachsten Annahmen, welche wir in Hinsicht derselben machen können, sind diese, dass erstens der Verlust, welchen eine sich selbst überlassene elektrische Kraft in der Zeiteinheit erleidet, der Kraft selbst proportional ist, und dass zweitens unabhängig von diesem Verlust die magnetischen Kräfte hier

dieselben Aenderungen hervorzubringen streben, wie in den bisher betrachteten Körpern. Führen wir eine neue Constante  $\lambda$  ein, so erlaubt uns die erste Annahme zu behaupten, dass die sich selbst überlassene Kraftcomponente  $X$  sich ändern werde nach der Gleichung:

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = -4\pi\lambda AX.$$

Die zweite Annahme ergänzt diese erste dahin, dass, wenn magnetische Kräfte vorhanden sind, die Aenderung geschehen werde nach der Gleichung:

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{ds} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX.$$

Die Constante  $\lambda$  heisst die spezifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Körpers. Ihre Dimension ist die einer reciproken Zeit. Die Grösse  $\varepsilon/4\pi\lambda$  ist daher eine Zeit; es ist diejenige Zeit, in welcher die sich selbst überlassene Kraft auf den *eten* Theil ihres Anfangswerthes herabsinkt, die sogenannte Relaxationszeit. Die letztere, nicht etwa  $\lambda$  selbst, ist, wie zuerst Hr. E. Cohn bemerkt und hervorgehoben hat<sup>1)</sup>, neben der ersten eine zweite innere Constante des betrachteten Körpers, eindeutig festsetzbar ohne Zuhülfenahme eines zweiten Mediums.

Unsere Ueberlegungen führen uns nun vermuthungsweise auf folgende Gleichungen, welche den Erfahrungen genügen:

$$(6_a) \left\{ \begin{array}{l} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right. \quad (6_b) \left\{ \begin{array}{l} A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{ds} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ. \end{array} \right.$$

Offenbar beziehen sich diese Gleichungen nur auf isotrope Körper, dagegen ist es, was unsere bisherigen Voraussetzungen anlangt, nicht nothwendig, dass die Körper auch homogen seien. Um indessen in Wahrheit die Vertheilung der Kräfte in anhomogenen Körpern genau darzustellen, bedürfen unsere Gleichungen noch einer gewissen Ergänzung. Aendert sich nämlich die

<sup>1)</sup> Vgl. dieserhalb und in Hinsicht der Art, wie hier die Grösse  $\lambda$  eingeführt wird: E. Cohn, Berl. Ber. 26. p. 405. 1889.

Beschaffenheit eines Körpers von Punkt zu Punkt, so sinkt im allgemeinen die elektrische Kraft sich selbst überlassen nicht völlig auf Null ab, sondern nimmt einen gewissen von Null verschiedenen Endwerth an. Diesen Werth, dessen Componenten  $X' Y' Z'$  sein mögen, nennen wir die in dem betreffenden Punkte wirksame elektromotorische Kraft. Wir betrachten dieselbe als unabhängig von der Zeit, sie ist im allgemeinen um so grösser, je grösser die Aenderung der chemischen Beschaffenheit in der Längeneinheit ist. Wir tragen der Wirkung der elektromotorischen Kraft Rechnung, indem wir den Abfall der sich selbst überlassenen elektrischen Kraft nicht ihrem absoluten Werthe proportional setzen, sondern dem Unterschiede, welcher noch vorhanden ist zwischen diesem absoluten Werthe und dem Endwerthe. Unsere Gleichungen werden so für Leiter, deren Structur zum Auftreten elektromotorischer Kräfte Anlass giebt:

$$(6.) \left\{ \begin{aligned} A\mu \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{aligned} \right. (6_a) \left\{ \begin{aligned} A\varepsilon \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A(X-X'), \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda A(Y-Y'), \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda A(Z-Z'). \end{aligned} \right.$$

#### 7. Anisotrope Leiter.

Verhält sich der Leiter nach verschiedenen Richtungen verschieden, so dürfen wir nicht mehr annehmen, dass der Abfall einer jeden Componente der sich selbst überlassenen Kraft nur abhängt von dem Werthe dieser Componente selbst, es liegt aber die Vermuthung nahe, dass er eine lineare Function der drei Componenten sei. Nehmen wir zu dieser Vermuthung die Voraussetzung, dass für verschwindendes Leitungsvermögen die Gleichungen sich auf die eines anisotropen Nichtleiters reduciren, so gelangen wir zu folgendem System:

$$(7.) \left\{ \begin{aligned} A \left( \mu_{11} \frac{dL}{dt} + \mu_{12} \frac{dM}{dt} + \mu_{13} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \left( \mu_{12} \frac{dL}{dt} + \mu_{22} \frac{dM}{dt} + \mu_{23} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \left( \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{aligned} \right.$$

$$(7_b) \left\{ \begin{array}{l} A \left( \epsilon_{11} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{12} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{13} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{11} (X-X') + \lambda_{12} (Y-Y') + \lambda_{13} (Z-Z') \}, \\ A \left( \epsilon_{12} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{22} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dN}{dz} - \frac{dL}{dx} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{21} (X-X') + \lambda_{22} (Y-Y') + \lambda_{23} (Z-Z') \}, \\ A \left( \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{31} (X-X') + \lambda_{32} (Y-Y') + \lambda_{33} (Z-Z') \}. \end{array} \right.$$

Es ist sehr wahrscheinlich, dass für alle wirklichen Körper  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ ,  $\lambda_{21} = \lambda_{12}$ ,  $\lambda_{23} = \lambda_{32}$  sei. Auch in den Gleichungen dieses Abschnittes können die Constanten  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  als von Ort zu Ort ihren Werth verändernd angesehen werden.

### 8. Grenzbedingungen.

Man bemerkt leicht, dass die Gleichungen 7<sub>a</sub> und 7<sub>b</sub> alle früheren als besondere Fälle umfassen und dass selbst die Gleichungen des freien Aethers aus ihnen durch besondere Verfügung über die Constanten hervorgehen. Da nun diese Constanten Functionen des Raumes sein können, so liegt es nahe, die Grenzfläche zweier heterogenen Körper anzusehen als eine Uebergangsschicht, in welcher zwar die Constanten ausserordentlich rasch von einem Werth zu einem anderen übergehen, in welcher dies jedoch in solcher Weise geschieht, dass auch in der Schicht selbst jene Gleichungen immer noch gelten und endliche Beziehungen zwischen den endlich bleibenden Werthen der Constanten und den ebenfalls endlich bleibenden Kräften ausdrücken. Um aus dieser der Erfahrung genügenden Vermuthung die Grenzbedingungen abzuleiten, lassen wir der Einfachheit halber das betrachtete Element der Trennungsfläche mit der  $xy$ -Ebene zusammenfallen.

Beachten wir zunächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte zwischen den sich berührenden Körpern nicht, so ergibt die Betrachtung der ersten beiden der Gleichungen 7<sub>a</sub> und 7<sub>b</sub>, dass die Grössen:

$$\frac{dX}{dz}, \quad \frac{dY}{dz}, \quad \frac{dM}{dz}, \quad \frac{dL}{dz}$$

zufolge unserer Voraussetzung auch in der Uebergangsschicht endlich bleiben müssen. Bezieht sich also der Index 1 auf die eine, der Index 2 auf die andere Seite der Grenzschrift, so muss sein:

$$(8.) \quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= 0, \\ X_2 - X_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8_b) \quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0, \\ L_2 - L_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die zur Grenzfläche tangentialen Componenten der Kräfte pflanzen sich also stetig durch dieselbe fort. Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen (7.) und (7<sub>b</sub>) ergibt dann weiter, dass die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mu_{12} \frac{dL}{dt} + \mu_{22} \frac{dM}{dt} + \mu_{32} \frac{dN}{dt} \quad \text{und} \\ \epsilon_{12} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{22} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{32} \frac{dZ}{dt} + 4\pi (\lambda_{21} X + \lambda_{22} Y + \lambda_{23} Z) \end{aligned}$$

den gleichen Werth haben müssen auf der einen und auf der anderen Seite der Grenzschrift. Diese Aussage, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Normalcomponenten der Kraft auf beiden Seiten der Grenzfläche giebt, nimmt für isotrope Körper die einfache Form an:

$$(8_c) \quad \mu_1 \frac{dN_1}{dt} - \mu_2 \frac{dN_2}{dt} = 0,$$

$$(8_d) \quad \epsilon_1 \frac{dZ_1}{dt} - \epsilon_2 \frac{dZ_2}{dt} = -4\pi (\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2).$$

Schliessen wir demnächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Grenzfläche nicht aus, so haben wir zu beachten, dass erfahrungsmässig die zur Grenzfläche normale Componente dieser Kräfte, also  $Z'$ , in der Uebergangsschicht selbst unendlich wird, in solcher Weise jedoch, dass das durch die Grenzfläche hindurch erstreckte Integral  $\int Z' dx$  einen endlichen Werth behält, welchen uns die Versuche angeben, während sie uns über den Verlauf von  $Z'$  selbst im Unklaren lassen. Wir genügen der Voraussetzung dieses Abschnittes nunmehr durch die Annahme, dass in der Uebergangsschicht neben  $L, M, N, X, Y$  die Grösse  $Z - Z'$  endlich bleibe.  $Z$  wird dann daselbst unendlich,  $dZ/dt$  aber können wir nichtsdestoweniger endlich belassen. Wir setzen ferner:

$$(8_e) \quad \int Z dx = \int Z' dx = \varphi_{1,2}.$$

Integriren wir nunmehr die ersten zwei der Gleichungen (7<sub>a</sub>) und (7<sub>b</sub>) nach Multiplication mit  $dx$  durch die Uebergangsschicht hindurch, so erhalten wir, da wegen der Kürze des Weges das Integral jeder endlichen Grösse verschwindet, die Bedingungen:

$$(8_r) \quad \begin{cases} Y_2 - Y_1 = \frac{d\varphi_{12}}{dy}, \\ X_2 - X_1 = \frac{d\varphi_{12}}{dx}, \end{cases} \quad (8_s) \quad \begin{cases} M_2 - M_1 = 0, \\ N_2 - N_1 = 0. \end{cases}$$

Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen (7<sub>a</sub>) und (7<sub>b</sub>) ergibt dann als Bedingungen für die Normalkräfte, dass zu beiden Seiten der Grenzfläche die Werthe der Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt}, \\ & \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} + 4\pi \{ \lambda_{11} (X - X') \\ & \quad + \lambda_{22} (Y - Y') + \lambda_{33} (Z - Z') \} \end{aligned}$$

die gleichen sein müssen. Sind die Körper zu beiden Seiten der Grenzfläche homogen, so hat das Vorhandensein der elektromotorischen Kräfte keinen Einfluss auf die Bedingungen, durch welche die zu beiden Seiten herrschenden Kräfte mit einander verknüpft sind.

Da unsere Grenzbedingungen nichts anderes sind, als die allgemeinen Gleichungen (7<sub>a</sub>) und (7<sub>b</sub>), transformirt für besondere Verhältnisse, so können wir jede Aussage und jede Operation, welche in einem bestimmten Bereich diese allgemeinen Gleichungen betrifft, ohne weiteres auch über die in dem Bereich vorkommenden Grenzen heterogener Körper uns erstreckt denken, vorausgesetzt nur, dass dieses Verfahren nicht mathematische Unzulässigkeiten einschliesst, vorausgesetzt also, dass sich unsere Aussagen und Operationen unmittelbar oder nach geeigneter Umformung beständig in endlichen und bestimmten Ausdrücken bewegen. Wir werden der hieraus entspringenden Bequemlichkeit des öfteren uns bedienen. Wenn wir dabei im allgemeinen darauf verzichten, den Beweis der Endlichkeit und Bestimmtheit aller vorkommenden Ausdrücke zu erbringen, so geschieht dies nicht, weil wir diesen Beweis für überflüssig hielten, sondern

nur, weil für alle in Betracht kommenden Fälle der Beweis schon seit lange erbracht oder nach bekannten Mustern zu erbringen ist.

Von den bisherigen Abschnitten vermehrte ein jeder die Zahl der von der Theorie umfassten Thatsachen. Im Gegensatz dazu handeln die nächstfolgenden Abschnitte von Namen und Bezeichnungen. Da durch Einführung derselben die Zahl der umfassten Thatsachen nicht vermehrt wird, so sind sie nur ein Beiwerk der Theorie; ihr Werth besteht zum Theil in der Ermöglichung einer kürzeren Ausdrucksweise, zum Theil aber auch nur darin, dass sie die Verbindung unserer Theorie mit den älteren Anschauungen der Elektrizitätslehre vermitteln.

#### 9. Elektrische und magnetische Polarisaton.

Soweit sich unsere Gleichungen auf isotrope Medien beziehen, giebt jede einzelne den im nächsten Augenblick stattfindenden Werth einer einzigen der in Betracht kommenden physikalischen Grössen, ausgedrückt als eindeutige Function der im gegenwärtigen Augenblick vorhandenen Zustände. Diese Form der Gleichungen ist eine sehr vollkommene vom mathematischen Standpunkte aus, weil sie uns von vornherein übersehen lässt, dass die Gleichungen den Ablauf eines jeden willkürlich angeregten Processes eindeutig bestimmen. Sie ist sehr vollkommen auch von einem mehr philosophischen Standpunkte aus, weil sie uns sogleich in der linken Seite der Gleichung den zukünftigen Zustand, die Wirkung, erkennen lässt, in der rechten Seite der Gleichung aber als Ursache den gegenwärtigen Zustand aufweist. Diejenigen unserer Gleichungen, welche sich auf anisotrope Medien beziehen, haben nicht diese vollkommene Form, da sie auf der linken Seite nicht die Aenderungen einer einzelnen physikalischen Grösse, sondern Functionen solcher Aenderungen enthalten. Da diese Functionen lineare sind, kann allerdings durch Auflösung der Gleichungen nach den einzelnen Aenderungen die gewünschte Form hergestellt werden. Ein anderes Mittel zu gleichem Zwecke, welches zugleich die Gleichungen vereinfacht, ist die Einführung der Grössen, welche wir Polarisatonen nennen. Wir setzen:

$$(9.) \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11}L + \mu_{12}M + \mu_{13}N, \\ \mathfrak{M} = \mu_{12}L + \mu_{22}M + \mu_{23}N, \\ \mathfrak{N} = \mu_{13}L + \mu_{23}M + \mu_{33}N, \end{cases} \quad (9_a) \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{12}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{13}X + \varepsilon_{23}Y + \varepsilon_{33}Z, \end{cases}$$

und nennen die Resultante der  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  die magnetische, die Resultante der  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  die elektrische Polarisation. Für isotrope Medien sind Polarisationen und Kräfte gleich gerichtet, und das Verhältniss ersterer zu letzteren ist die Dielektricitäts-, resp. Magnetisirungsconstante. Für den Aether fallen Polarisationen und Kräfte zusammen. Führen wir die Polarisationen in die linken Seiten unserer Gleichungen ein, so giebt uns jede Gleichung die Aenderung einer einzigen Polarisationscomponente als Folge der augenblicklich vorhandenen Kräfte. Da die Kräfte lineare Functionen der Polarisationen sind, so hat es keine Schwierigkeit, auch auf der rechten Seite der Gleichungen die Polarisationen einzuführen. Wir würden hierdurch diejenige gerichtete Grösse, durch welche wir die elektromagnetischen Zustände zuerst bestimmten, die Kraft, ersetzt haben durch eine andere gerichtete Grösse, die Polarisation, welche uns das gleiche, aber wenig mehr leistet, als jene. Dass die Einführung der Polarisationen und Kräfte nebeneinander die Gleichungen wesentlich vereinfacht, ist eine erste Andeutung dafür, dass eine vollständige Darstellung der Zustände in ponderablen Körpern die Angabe mindestens zweier gerichteten Grössen für den elektrischen und zweier gerichteten Grössen für den magnetischen Zustand erfordert.

Um unsere Gleichungen weiter zu vereinfachen, setzen wir:

$$(9_b) \begin{cases} u = \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z'), \\ v = \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z'), \\ w = \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'). \end{cases}$$

Aus Gründen, welche im folgenden Abschnitt hervortreten, nennen wir  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die (elektrostatisch gemessenen) Componenten der elektrischen Strömung.

Unsere allgemeinsten Gleichungen nehmen nunmehr die Form an:

$$(9_a) \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (9_b) \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi Av, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi Aw, \end{cases}$$

und die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit eines beliebigen Körpers erhält durch Einführung der Polarisationen die Gestalt:

$$\frac{1}{8\pi} (X X + Y Y + Z Z) + \frac{1}{8\pi} (L L + M M + N N).$$

In diesen Aussagen kommen keine Grössen mehr vor, welche sich auf einen besonderen Körper beziehen. Die Aussage, dass diese Gleichungen für alle Punkte des unendlichen Raumes erfüllt sein müssen, umfasst alle in dies Gebiet einzureihenden Probleme, und die unendliche Mannigfaltigkeit dieser Probleme entsteht nur dadurch, dass die Constanten der linearen Relationen  $(9_a)$ ,  $(9_b)$ ,  $(9_c)$ , nämlich die  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  in mannigfaltiger Weise Functionen des Raumes sein können, theils stätig, theils unstätig von Punkt zu Punkt sich verändernd.

#### 10. Elektricität und Magnetismus.

Es sei ein System ponderabler Körper, in welchem elektromagnetische Vorgänge sich abspielen, durch den leeren Raum abgegrenzt gegen andere Systeme. Differentiiren wir die drei Gleichungen  $(9_a)$  bzw. nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und addiren, so erhalten wir für alle Punkte des Systems die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) = -4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right).$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit dem Raumelement  $d\tau$  und integriren über den Raum bis zu einer beliebigen, das ponderable System vollständig umschliessenden Fläche. Das Element dieser Fläche sei  $d\omega$ , die auf  $d\omega$  senkrechte Richtung bilde mit den Axen die Winkel  $n, x$ ,  $n, y$ ,  $n, z$ . Wir erhalten, da die  $u, v, w$  an der Fläche gleich Null sind:

$$\frac{d}{dt} \int \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau = \frac{d}{dt} \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z) d\omega$$

$$\begin{aligned}
 &= -4\pi \int \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau \\
 &= -4\pi \int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\omega = 0.
 \end{aligned}$$

Also, wenn  $\epsilon$  eine von der Zeit unabhängige Grösse bezeichnet:

$$(10_a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau \\ &= \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z) d\omega = 4\pi \epsilon. \end{aligned} \right.$$

Die Grösse  $\epsilon$  ist offenbar eine Function des elektrischen Zustandes des Systems und zwar eine solche Function, welche durch keine inneren oder äusseren lediglich elektrodynamischen Vorgänge vermehrt oder vermindert werden kann. Diese Unzerstörbarkeit der Grösse  $\epsilon$ , welche dieselbe auch gegenüber anderen als rein elektrodynamischen Vorgängen bewahrt, so lange sich diese Vorgänge auf das Innere des Systems beschränken, hat die Vermuthung wachgerufen, dass  $\epsilon$  die Menge einer in dem System enthaltenen Substanz angebe. Entsprechend dieser Anschauung nennen wir  $\epsilon$  die Menge der in dem ponderablen System enthaltenen Elektrizität. Allerdings kann  $\epsilon$  positiv oder negativ sein, während die Menge einer Substanz nothwendig positiv ist. Man hat deshalb die Hypothese vervollständigt durch die Annahme zweier Elektrizitäten von entgegengesetzten Eigenschaften und hat dem  $\epsilon$  dann die Bedeutung der Differenz beider beigelegt, oder man hat Hülfe gesucht in der Annahme, es bezeichne  $\epsilon$  nur die Abweichung des wirklichen Gehaltes an Elektrizität von dem normalen. Stellt aber in einer dieser oder in einer anderen Form  $\epsilon$  die Menge einer Substanz dar, so muss jedes Raumelement  $d\tau$  seinen bestimmten Beitrag zu dem Gesamtwerthe von  $\epsilon$  liefern. Nur vermuthungsweise können wir das Raumintegral, welches uns  $\epsilon$  liefert, auf die einzelnen Raumelemente vertheilen. Eine erste mögliche und augenblicklich naheliegende Vertheilung legt dem Raumelement  $d\tau$  den Elektricitätsinhalt:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau$$

bei. Die so bestimmte Elektricitätsmenge des Raumelementes wollen wir die wahre Elektrizität desselben nennen; dement-

sprechend nennen wir im Innern eines Körpers den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right)$$

die wahre räumliche Dichte und an der Grenzfläche verschiedenartiger Körper den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi} \{ (X_2 - X_1) \cos n, x + (Y_2 - Y_1) \cos n, y + (Z_2 - Z_1) \cos n, z \}$$

die wahre Flächendichte der Elektrizität.

Eine andere mögliche und naheliegende Vertheilung von  $e$  auf die Raumelemente erhalten wir durch die Bemerkung, dass im leeren Raume Polarisationen und Kräfte identisch sind, dass wir also schreiben können an Stelle von (10<sub>a</sub>):

$$(10_b) \quad \begin{cases} 4\pi e = \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z) d\omega \\ = \int \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau, \end{cases}$$

und weiterhin den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau$$

als den Beitrag betrachten, welchen das Raumelement  $d\tau$  zu  $e$  liefert. Die so bestimmte Elektrizitätsmenge eines Raumelementes nennen wir die freie Elektrizität desselben, dementsprechend:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right)$$

die freie räumliche Dichte, und an Unstetigkeitsflächen:

$$\frac{1}{4\pi} \{ (X_2 - X_1) \cos n, x + (Y_2 - Y_1) \cos n, y + (Z_2 - Z_1) \cos n, z \}$$

die freie Flächendichtigkeit der Elektrizität. Den Unterschied zwischen der wahren und der freien Elektrizität nennen wir die gebundene Elektrizität. Unsere Bezeichnungsweise schliesst sich derjenigen üblichen Bezeichnungsweise an, welche ihren Ursprung aus der bisherigen Anschauung von dem Zustandekommen der elektrischen Fernwirkungen nimmt.<sup>1)</sup> Nach dieser Anschauung

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 30 am Schluss des Buches.]

wird ein Theil der in einen Nichtleiter eingeführten fremden oder „wahren“ Elektrizitätsmengen durch elektrische Verschiebungen<sup>1)</sup> in den Molekülen des umgebenden Mittels „gebunden“, während der Rest „frei“ bleibt, seine Fernwirkungen nach aussen zu entfalten. Doch weicht auch in manchen Aussagen unsere Bezeichnungsweise von der üblichen ab. Da aber die letztere schwankend und nicht immer consequent ist, so war es mir nicht möglich, eine Bezeichnungsweise zu finden, welche nicht in irgend einem Falle gegen den Sprachgebrauch verstiess. Auch insofern schwankt die übliche Ausdrucksweise, als sie unter Elektrizität schlechthin ohne Unterschied bald die wahre, bald die freie Elektrizität versteht, sogar in wichtigen Aussagen.

Nach dem Vorangegangenen bezeichnen wir das durch  $4\pi$  dividirte und über eine beliebige geschlossene Fläche erstreckte Integral:

$$\int (\mathcal{X} \cos n, x + \mathcal{Y} \cos n, y + \mathcal{Z} \cos n, z) d\omega$$

als die von dieser Fläche umschlossene wahre Elektrizität. Das gleiche Integral erstreckt über eine nicht geschlossene Fläche wollen wir die Zahl der diese Fläche im Sinne der positiven Normalen durchschneidenden elektrischen Kraftlinien nennen. Durch diese Bezeichnung knüpfen wir an die Vorstellung Faraday's an, derzufolge die Kraftlinien Linien sind, welche in isotropen homogenen Körpern überall in Richtung der herrschenden Kraft laufen, und zwar in einer Fülle, welche der Grösse der Kraft proportional ist. Wir haben allerdings durch unsere Bezeichnung diese Vorstellung dahin vervollständigt, bezw. präcisirt, dass die Kraftlinien in beliebigen Körpern überall in Richtung der Polarisation, nicht der Kraft laufen sollen und haben allgemein ihre Dichte der Grösse der Polarisation, nicht der Kraft proportional gesetzt. Unsere Definitionen bringen es mit sich, dass die mit  $4\pi$  multiplicirte Menge der in einem beliebigen Raume enthaltenen wahren Elektrizität gleich ist dem Ueberschuss der in den Raum eintretenden Kraftlinien über die austretenden. Jede Kraftlinie, welche überhaupt ein Ende findet, mündet demnach an wahrer Elektrizität und wir könnten die

<sup>1)</sup> Welche nicht etwa mit unseren Polarisationen identisch sind. [Siehe den theoretischen Theil der Einleitung.]

wahren Elektricitäten definiren als die freien Enden der Kraftlinien. Ist ein gewisser Raum in der Nachbarschaft der Fläche, über welche unser Integral erstreckt ist, frei von wahrer Elektricität, so ist der Werth des Integrales unabhängig von der besonderen Lage der Fläche innerhalb dieses Raumes und nur abhängig von der Lage der Grenzlinie der Fläche. Für diesen Fall bezeichnen wir dann den Werth des Integrales auch als die Zahl der die Umrisslinie durchsetzenden Kraftlinien, indem wir uns die in diesem Ausdruck bleibende Vieldeutigkeit, soweit nöthig, durch besondere Festsetzungen beseitigt denken.

Wir wollen weiter die Aenderung der wahren Elektricität  $e_w$  in einem beliebig begrenzten Theile unseres Systems berechnen. Es möge  $d\omega$  wiederum ein Element der Grenzfläche dieses Theiles sein. Wir erhalten:

$$(10.) \frac{de_w}{dt} = - \int \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau = - \int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\omega.$$

Verläuft nun unsere Grenzfläche lediglich in solchen Körpern, für welche die  $\lambda$  gleich Null sind, so verschwinden an der Fläche immer noch die  $u, v, w$ , es ist also der Inhalt des umspannten Raumes an wahrer Elektricität constant. Aus einem Raume, welcher vollständig von Körpern umgeben ist, für welche die  $\lambda$  gleich Null sind, vermag demnach die wahre Elektricität durch rein elektrodynamische Vorgänge nicht zu entweichen. Aus dieser Ursache nennen und nannten wir solche Körper Nichtleiter. Geht die Grenzfläche aber ganz oder theilweise durch Körper, in welchen die  $\lambda$  von Null verschieden sind, so ist eine Aenderung des Elektricitätsgehaltes des umschlossenen Raumes durch rein elektrische Bewegungen möglich; aus diesem Grunde bezeichnen wir Körper der letzteren Art als Leiter. Die Unterscheidung der Körper in Leiter und Nichtleiter bezieht sich also auf die wahre Elektricität, in Hinsicht der freien Elektricität können alle Körper als Leiter betrachtet werden (Verschiebungsströme). Die Menge einer Substanz kann sich in einem Raume nur mittelst Ein- und Austrittes durch die Oberfläche hindurch verändern, und zwar muss durch jedes Oberflächenelement hindurch eine bestimmte Menge der Substanz treten. Mit der Thatsache, dass durch jede geschlossene Oberfläche in der Zeiteinheit die durch unser Integral angegebene Elektricitätsmenge tritt, ist die An-

nahme vereinbar, dass durch die Flächeneinheit jedes Oberflächenelementes die Menge:

$$u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z$$

trete. Entsprechend dieser Annahme nennen und nannten wir  $u, v, w$  die Componenten der elektrischen Strömung und das über eine nicht geschlossene Oberfläche genommene Integral

$$\int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\omega$$

den diese Fläche durchfliessenden elektrischen Strom. Es muss indessen hervorgehoben werden, dass selbst wenn die Stofflichkeit der Elektrizität zugegeben ist, die obige specielle Bestimmung ihrer Strömung in Leitern eine weitere Hypothese einschliesst. Dem gefundenen Systeme der Bewegung kann ein willkürliches, in jedem Augenblick geschlossenes Stromsystem überdeckt werden, ohne dass dadurch die Ab- oder Zunahme der Elektrizität in irgend einem Punkte sich änderte.

Ist ein Theil unseres Systems durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unelektrischen Zustand in seinen gegenwärtigen gelangt, oder kann er durch lediglich elektromagnetische Veränderungen in den unelektrischen Zustand zurückkehren, so ist in allen Nichtleitern dieses Theiles die wahre Elektrizität gleich Null. Für solche Theile eines Systems treten dann also zu den allgemeinen Gleichungen noch die folgenden, mit ihnen verträglichen als Beschränkungen der zulässigen Anfangszustände hinzu:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} = 0$$

für das Innere der Nichtleiter;

$$(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) \cos n, x + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1) \cos n, y + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1) \cos n, z = 0$$

für die Grenze zweier heterogener Nichtleiter.

Ganz analoge Betrachtungen wie in Hinsicht der elektrischen lassen sich anstellen in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen. Indem wir auf diese eingehen und dabei die Gleichungen (9.) benutzen, nennen wir für das Innere eines Körpers:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right)$$

die wahre räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi} \{ (\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1) \cos n, x + (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) \cos n, y + (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \cos n, z \}$$

die wahre Flächendichtigkeit des Magnetismus und das über einen bestimmten Theil des Raumes genommene Integral dieser Grössen den in diesem Theil enthaltenen wahren Magnetismus. Das über eine nicht geschlossene Fläche genommene Integral:

$$\int (\mathcal{Q} \cos n, x + \mathcal{M} \cos n, y + \mathcal{N} \cos n, z) d\omega$$

nennen wir die Zahl der durch diese Fläche, resp. den Umfang dieser Fläche tretenden magnetischen Kraftlinien. Ferner nennen wir für das Innere eines Körpers:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right)$$

die freie räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper:

$$\frac{1}{4\pi} \{ (L_2 - L_1) \cos n, x + (M_2 - M_1) \cos n, y + (N_2 - N_1) \cos n, z \}$$

die freie Flächendichtigkeit des Magnetismus. Die Unterschiede zwischen Leitern und Nichtleitern fallen hier fort, da die Gleichungen (9<sub>a</sub>) keine den  $u, v, w$  der Gleichungen (9<sub>b</sub>) entsprechende Glieder enthalten. In Hinsicht des wahren Magnetismus sind alle Körper Nichtleiter, in Hinsicht des freien Magnetismus können alle Körper als Leiter aufgefasst werden.

Ist ein System oder ein Theil eines solchen durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unmagnetischen Zustand hervorgegangen oder kann es durch solche Vorgänge in denselben zürücksinken, so gelten für das System oder diesen Theil des Systems die Gleichungen:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dx} + \frac{d\mathcal{M}}{dy} + \frac{d\mathcal{N}}{dz} = 0$$

für das Innere der Körper und:

$$(\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1) \cos n, x + (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) \cos n, y + (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \cos n, z = 0$$

für die Grenzflächen heterogener Körper, welche Gleichungen zu den allgemeinen als mit diesen verträgliche Bestimmungen über die möglichen Anfangszustände hinzutreten.

## 11. Erhaltung der Energie.

Es bezeichne  $S$  die elektromagnetische Energie eines Raumes  $\tau$ , welcher durch die Oberfläche  $\omega$  begrenzt wird. Wir berechnen die Aenderung von  $S$ , indem wir die Gleichungen (9<sub>a</sub>) und (9<sub>b</sub>) multipliciren sämmtlich mit  $(1/4\pi A) d\tau$ , alsdann der Reihe nach mit  $L, M, N, X, Y, Z$ , alles addiren und integriren über den Raum  $\tau$ . Wir erhalten:

$$(11_a) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{4\pi A} \int \left\{ (NY - MZ) \cos n_x + (LZ - NX) \cos n_y + (MX - LY) \cos n_z \right\} d\omega - \int (uX + vY + wZ) d\tau.$$

Erstrecken wir den Raum  $\tau$  über ein vollständiges elektromagnetisches System, d. h. bis zu einer Fläche, an welcher die Kräfte verschwinden, so wird unsere Gleichung:

$$\frac{dS}{dt} = - \int (uX + vY + wZ) d\tau.$$

Die Erhaltung der Energie verlangt demnach, dass in jedem System, welches der Einwirkung von aussen nicht unterliegt, in der Zeiteinheit ein Energiebetrag von der Grösse des rechts stehenden Integrals in anderer als elektromagnetischer Form auftritt. Die Erfahrung genügt dieser Forderung, sie belehrt uns weitergehend, dass jedes einzelne Raumelement  $d\tau$  zum Gesamtbetrage der umgesetzten Energie den Betrag

$$(uX + vY + wZ) d\tau$$

liefert und zeigt uns, in welchen neuen Formen diese Energie auftritt. Allerdings leistet dieses die Erfahrung genau gesprochen nicht allgemein, sondern einstweilen nur in Hinsicht der folgenden besonderen Fälle. Im Innern eines homogenen isotropen Leiters nimmt die in der Zeiteinheit und Volumeinheit auftretende Energiemenge nach der Theorie sowohl als nach der Erfahrung die Form an:

$$\lambda (X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{\lambda} (u^2 + v^2 + w^2),$$

sie ist stets positiv und entspricht einer Wärmeentwicklung — der Joule'schen Wärme. An der Grenze zweier homogenen isotropen Körper nimmt in der Uebergangsschicht die in der

Volumeneinheit auftretende Energiemenge die Form an

$$u X' + v Y' + w Z';$$

eine Integration über die ganze Dicke der Uebergangsschicht ergibt daraus für die in der Flächeneinheit der Grenze auftretende Energiemenge den Betrag:

$$(u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) \cdot \varphi_{1,2},$$

welchen Ausdruck ebenfalls die Erfahrung bestätigt. Es kann dieser Ausdruck positiv oder negativ sein, er kann einem Verschwinden oder Entstehen fremder Energieformen entsprechen. Entweder ist die umgesetzte fremde Energie hier gleichfalls Wärme — Peltier'sche Wärme —; in diesem Falle bezeichnen wir die thätigen elektromotorischen Kräfte als thermoelektrische. Oder es wird neben Wärme auch chemische Energie umgesetzt; in diesem Falle bezeichnen wir die Kräfte als elektrochemische. Fassen wir nunmehr einen beliebig begrenzten Theil unseres Systems ins Auge und berechnen die Zunahme der gesammten Energie dieses Theiles, also der Grösse:

$$\frac{dS}{dt} + \int (u X + v Y + w Z) d\tau,$$

so finden wir nach dem vorigen diese Zunahme gleich einem über die Oberfläche des Raumes genommenen Integral. Die Aenderung des Energievorrathes dieses und damit eines jeden Raumes wird also richtig berechnet, wenn wir annehmen, die Energie trete nach Art einer Substanz durch die Oberfläche ein, und zwar in solcher Fülle, dass durch die Flächeneinheit einer jeden Oberfläche die Menge:

$$\frac{1}{4\pi A} \{ (NY - MZ) \cos n, x + (LZ - NX) \cos n, y \\ + (MX - LY) \cos n, z \}$$

tritt. Eine geometrische Discussion dieses Ausdrucks ergibt, dass unsere Annahme identisch ist mit der Aussage, die Energie bewege sich überall in einer Richtung, welche auf den Richtungen der magnetischen und der elektrischen Kraft senkrecht steht und in solcher Fülle, dass in dieser Richtung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eine Menge trete gleich dem Product der beiden Kräfte, dem Sinus des eingeschlossenen

Winkels und dem Factor  $1/4\pi A$ . Es ist dies die höchst bemerkenswerthe Theorie des Hrn. Poynting über die Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde.<sup>1)</sup> Bei Beurtheilung der physikalischen Bedeutung derselben muss erstens hervorgehoben werden, dass die Zerlegung unseres Oberflächenintegrals in seine Elemente eine hypothetische war, und dass das Ergebniss derselben nicht immer ein wahrscheinliches ist. Ruht ein Magnet dauernd neben einem elektrisirten Körper, so muss zufolge dieses Resultats die Energie der Nachbarschaft sich in beständiger Bewegung befinden, allerdings in geschlossenen Bahnen. Ein grösseres Bedenken scheint mir in der Frage zu liegen, wie weit bei unseren gegenwärtigen Kenntnissen von der Energie die Localisation derselben und ihre Verfolgung von Punkt zu Punkt überhaupt Sinn und Bedeutung hat. Derartige Betrachtungen sind noch nicht durchgeführt bei den einfachsten Energieumsätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist daher die Frage noch unerledigt, ob und in welchem Umfange der Begriff der Energie eine solche Behandlungsweise zulässt.<sup>2)</sup>

#### 12. Ponderomotorische Kräfte.

Die mechanischen Kräfte, welche wir im elektromagnetisch gestörten Felde zwischen den ponderablen Körpern wahrnehmen, sehen wir an als die Resultanten mechanischer Druckkräfte, welche durch das Vorhandensein der elektromagnetischen Störungen im Aether und in den übrigen Körpern wachgerufen werden. Zuzufolge dieser Anschauung sind die auf einen ponderablen Körper wirkenden mechanischen Kräfte vollständig bestimmt durch den elektromagnetischen Zustand seiner unmittelbaren Umgebung, ohne dass es darauf ankäme, welche Ursachen weiterhin diesen Zustand hervorgerufen haben. Wir setzen ferner voraus, dass die unterstellten Druckkräfte von solcher Art sind, dass sie keine Resultanten ergeben, welche das Innere des Aethers selbst in Bewegung zu setzen streben. Ohne diese Voraussetzung wäre unser System nothwendig unrichtig oder doch unvollständig, denn ohne sie könnte man von elektromagnetischen Kräften im ruhenden Aether allgemein gar nicht reden. Eine nothwendige

<sup>1)</sup> J. H. Poynting, Phil. Trans. 2. p. 343. 1884.

<sup>2)</sup> [Siehe Anmerkung 31 am Schluss des Buches.]

Folge dieser Voraussetzung ist es, dass die an den ponderablen Körpern zu beobachtenden mechanischen Kräfte dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen.

Es fragt sich nun, ob sich Druckkräfte angeben lassen, welche diesen Anschauungen entsprechen und geeignet sind, die wirklich beobachteten Resultanten zu ergeben. Maxwell und in allgemeinerer Form von Helmholtz haben Formen der Druckkräfte angegeben, welche allen Ansprüchen genügen für statische und stationäre Zustände. Aber für den allgemeinen veränderlichen Zustand als gültig angenommen, würden diese Drucke das Innere des Aethers selbst in Bewegung setzen. Wir nehmen deshalb an, dass die vollständigen Formen noch nicht gefunden seien, vermeiden es, bestimmte Angaben über die Grösse der Drucke zu machen und ziehen es vor, die ponderomotorischen Kräfte abzuleiten mit Hülfe der Voraussetzungen, welche wir bereits angegeben haben, mit Hülfe des Principes von der Erhaltung der Energie und mit Hülfe der folgenden Erfahrungsthat-  
sache: Werden die ponderablen Körper eines elektrisch oder magnetisch erregten Systems, welches dem statischen Zustand stets unendlich nahe bleibt, gegen einander bewegt und gleichzeitig die in jedem Element der Körper befindliche Menge der wahren Elektrizität und des wahren Magnetismus als unveränderlich und an dem Elemente haftend behandelt, so findet die zur Bewegung der Körper verbrauchte mechanische Arbeit ihre einzige Compensation in der Vermehrung der elektromagnetischen Energie des Systems, ist also dieser gleich.<sup>1)</sup>

Es bleibt die Frage offen, ob sich überhaupt Formen der Druckkräfte angeben lassen, welche den von uns gestellten Anforderungen allgemein und genau genügen. Sollte dies nicht der Fall sein, so enthält die Gesamtheit unserer Voraussetzungen einen inneren Widerspruch, welcher durch eine Correction an einer oder an mehreren dieser Voraussetzungen gehoben werden muss. Die erforderlichen Verbesserungen sind aber jedenfalls von solcher Art, dass sie in keiner der bisher beobachteten Erscheinungen ihre Wirkung geltend machen. Im übrigen ist hervorzuheben, dass, wenn sich hier eine Lücke in unserer Theorie findet, dies nicht eine Lücke in den Grund-

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 32 am Schluss des Buches.]

lagen, sondern eine solche in den Ausläufern der Theorie ist. Denn die erregten mechanischen Kräfte sind von unserem Standpunkte aus eine secundäre Folgeerscheinung der elektromagnetischen Kräfte; wir könnten die Theorie der letzteren behandeln, ohne die ersteren auch nur zu erwähnen, wie wir denn auch alle übrigen minder wichtigen Folgeerscheinungen des elektromagnetischen Zustandes von der Besprechung ausgeschlossen haben.

#### B. Ableitung der Erscheinungen aus den Grundgleichungen.

Wir theilen die durch unsere Gleichungen dargestellten Erscheinungen ein in statische, stationäre und dynamische. Damit eine Erscheinung zu den statischen oder stationären rechnet, ist nöthig, dass sie keine Aenderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte mit der Zeit bedinge, dass also die linken Seiten der Gleichungen (9<sub>a</sub>) und (9<sub>b</sub>) verschwinden. Damit eine Erscheinung weitergehend als eine statische bezeichnet werde, ist ausserdem nöthig, dass sie überhaupt nicht von Aenderungen in der Zeit begleitet werde, dass also insbesondere durch sie kein dauernder Energieumsatz in andere Formen bedingt werde. Hierfür ist die hinreichende und nothwendige Bedingung, dass auch die Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in den Gleichungen (9<sub>a</sub>) und (9<sub>b</sub>) verschwinden.

##### Statische Erscheinungen.

Wenn in den Gleichungen (9<sub>a</sub>) und (9<sub>b</sub>) die linken Seiten und die  $u$ ,  $v$ ,  $w$  verschwinden, so zerfällt das System in zwei voneinander unabhängige Systeme, von welchen das eine nur die elektrischen, das andere nur die magnetischen Kräfte enthält. Wir erhalten so zwei Gruppen von Problemen, von denen die eine als Elektrostatik, die andere als Lehre vom ruhenden Magnetismus bezeichnet zu werden pflegt.

#### 13. Elektrostatik.

Vom Auftreten der elektromotorischen Kräfte sehen wir in diesem Abschnitt ab, weil, wenn dieselben das Zustandekommen des statischen Zustandes überhaupt gestatten, ihre Wirkung zu schwach ist, um in den interessirenden Problemen in Betracht zu kommen. Hiernach müssen alsdann in den Leitern, woselbst die  $\lambda$  nicht verschwinden, die Kräfte  $X$   $Y$   $Z$  verschwinden. In den Nichtleitern nehmen die Gleichungen (9<sub>a</sub>) die Form an:

$$(13_*) \quad \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0.$$

Die Kräfte besitzen demnach ein Potential  $\varphi$ , dessen negativen Differentialquotienten sie gleich gesetzt werden können. Da die Kräfte überall endlich sind, ist  $\varphi$  überall stetig, es kann auch durch die Leiter hindurch fortgesetzt werden und ist alsdann in diesen als constant zu betrachten. An einer Grenzfläche setzen sich die zur Grenzfläche tangentialen Differentialquotienten von  $\varphi$  stetig durch die Fläche fort. Bezeichnet im übrigen  $e$ , die räumliche Dichte der freien Elektricität, so genügt nach Abschnitt 10 das Potential  $\varphi$  überall im Raume der Gleichung  $\Delta\varphi = -4\pi e$ , welche im freien Aether die Form  $\Delta\varphi = 0$  annimmt, und deren sinngemässe Umformung für die Trennungsfläche heterogener Körper daselbst die Bedingung ergibt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -4\pi e',$$

unter  $e'$ , die Flächendichtigkeit der freien Elektricität verstanden. Aus der Gesamtheit dieser Bedingungen folgt für  $\varphi$  der bis auf eine willkürlich bleibende Constante eindeutig bestimmte Werth  $\varphi = \int (e/r) d\tau$ , das Integral über den ganzen Raum, unter sinngemässer Berücksichtigung der Grenzflächen erstreckt. Bei gleicher Vertheilung des Potentials und der Kräfte in verschiedenen Nichtleitern sind also die freien Elektricitäten die gleichen. Die entsprechenden Mengen der wahren Elektricitäten aber sind verschieden und stehen für das Innere zweier homogener Nichtleiter im Verhältniss der Dielektricitätsconstanten. Die Bedingung dafür, dass die Dichtigkeit der wahren Elektricität im Innern der Nichtleiter gegebene Werthe  $e_w$  habe, ist, wenn wir uns für den Augenblick auf isotrope Körper beschränken:

$$\frac{d}{dx} \left( \varepsilon \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( \varepsilon \frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( \varepsilon \frac{d\varphi}{dz} \right) = -4\pi e_w,$$

welche an der Grenze zweier isotroper Körper die Form annimmt:

$$\varepsilon_2 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_2 - \varepsilon_1 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_1 = -4\pi e'_w,$$

unter  $e'_w$  die Flächendichte der wahren Elektricität verstanden.

Werfen wir noch unser Augenmerk auf den Energievorrath eines elektrostatischen Systems. Wir erhalten denselben der Reihe nach in den Formen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int (X X + Y Y + Z Z) d\tau &= -\frac{1}{8\pi} \int \left( X \frac{d\varphi}{dx} + Y \frac{d\varphi}{dy} + Z \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \varphi \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau = \frac{1}{4} \int \varphi e_v d\tau = \frac{1}{4} \iint \frac{e_v e_v'}{r} d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Die Integrationen sind dabei über allen Raum erstreckt gedacht, in welchem elektrische Störungen vorkommen, also bis zu Grenzen, an welchen die Störungen verschwinden, und die sinngemässe Umformung der Integrale an den Grenzflächen ist stillschweigend unterstellt. Die Zunahme, welche ein jeder dieser Ausdrücke erleidet, wenn bei eintretender Bewegung der ponderablen Körper die an den Körperelementen haftenden Mengen der wahren Elektricität constant bleiben, ist nach Abschnitt 12 gleich der von den mechanischen Kräften bei dieser Bewegung geleisteten Arbeit. Besteht also unser System aus zwei Elektricitätsmengen  $E_1$  und  $E_2$ , welche im Aether in einem gegen ihre eigenen Dimensionen sehr grossen Abstand  $R$  voneinander sich befinden, so vermindert sich bei Vermehrung des Abstandes beider um  $dR$  die elektrische Energie des Raumes um:

$$\frac{1}{2} (E_1 E_2 + E_2 E_1) \frac{dR}{R^2},$$

der Ausdruck  $E_1 E_2 / R^2$  stellt also die mechanische Kraft dar, mit welcher beide Elektricitäten sich voneinander zu entfernen trachten. Das Coulomb'sche Gesetz, welches in den älteren Theorien den Ausgangspunkt aller Betrachtungen bildete, erscheint jetzt als ein entferntes Endresultat.

In Hinsicht der allgemeinen Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte müssen wir uns hier begnügen, darauf hinzuweisen, dass die letzten beiden für die Energie erlangten Ausdrücke dieselben sind, deren Aenderung auch nach der gewöhnlichen Elektrostatik die bei der Bewegung der Körper geleistete Arbeit ergiebt, und daraus zu folgern, dass wir aus den Aenderungen dieser Ausdrücke dieselben Kräfte berechnen werden, von welchen die gewöhnliche Elektrostatik ausgeht und welche an der Erfahrung geprüft sind. Insbesondere wird sich zeigen lassen, dass auf ein Körperelement, welches die Menge  $e$  an wahrer Elektricität enthält, die mechanischen Kraftcompo-

nenten  $eX, eY, eZ$  einwirken. Wir kommen dadurch auf die Aussagen zurück, durch deren Hülfe wir zuerst die elektrischen Kräfte einführten.

#### 14. Ruhender Magnetismus.

Die Gleichungen, welche die Componenten ruhender magnetischer Kräfte verbinden, sind die gleichen, welche zwischen den Componenten ruhender elektrischer Kräfte obwalten. Alle Bemerkungen des vorigen Abschnittes lassen sich daher hier unter entsprechender Aenderung der Bezeichnungen wiederholen. Wenn gleichwohl die in diesem Gebiet interessirenden Probleme sich auch in mathematischer Beziehung von denen der Elektrostatik unterscheiden, so liegt das vorzugsweise an folgenden Gründen:

1) Es fällt hier die Classe der als Leiter zu bezeichnenden Körper fort.

2) In allen Körpern, mit Ausnahme solcher, welche permanenten oder remanenten Magnetismus zeigen, kommt wahrer Magnetismus nicht vor. Im Innern derartiger Körper, sofern sie isotrop sind, gilt daher für das magnetische Potential  $\psi$  nothwendig stets die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{d\psi}{dz}\right) = 0,$$

welche an der Grenze derartiger Körper übergeht in die Gleichung:

$$\mu_2 \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2 - \mu_1 \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_1 = 0.$$

Etwas verwickeltere, aber leicht angebbare Gleichungen gelten für das Innere und die Grenzen krystallinischer Körper und kommen in Betracht, wenn wir die Erscheinungen der sogenannten Magnokrystallkraft behandeln wollen.

3) Während die Dielektricitätsconstante aller bekannten Körper grösser als Eins ist, ist die Magnetisirungsconstante für viele Körper auch kleiner als Eins. Solche Körper bezeichnen wir als diamagnetische, im Gegensatz dazu die übrigen als paramagnetische. Die freie magnetische Dichte an der Oberfläche eines an den leeren Raum grenzenden isotropen Körpers ist

gleich dem  $(1-\mu)$ fachen der im Innern des Körpers normal zur Oberfläche gerichteten Kraft. Bei gleichem Sinn der Kraft ist also das Vorzeichen der Belegung eines diamagnetischen Körpers demjenigen der Belegung eines paramagnetischen Körpers entgegengesetzt.

Die Lehre vom ruhenden Magnetismus gewinnt ferner ein besonderes Ansehen durch den Umstand, dass gerade die in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen wichtigsten Körper, Eisen- und Stahlsorten, sich der Theorie nur in ganz roher Annäherung fügen. Diese Körper zeigen permanenten und remanenten Magnetismus, es ist also in ihnen die Polarisation des ponderablen Stoffes theilweise unabhängig von der herrschenden Kraft, und also der magnetische Zustand nicht vollständig durch eine einzige Richtungsgrösse zu definiren. Da ausserdem die Beziehungen zwischen der Kraft und den durch sie bewirkten Störungen keine linearen sind, so treten diese Körper aus doppeltem Grunde aus dem Rahmen der gegenwärtigen Theorie heraus. Um sie nicht ganz von der Betrachtung ausschliessen zu müssen, ersetzen wir sie durch den jedesmal nächststehenden zweier Idealkörper, des vollkommen weichen Eisens oder des vollkommen harten Stahles. Ersteres definiren wir als einen Körper, welcher unseren Gleichungen folgt, und für welchen  $\mu$  einen sehr grossen Werth hat. Indem wir diesen Werth je nach der Natur des behandelten Problems verschieden wählen, erzielen wir eine weitere Annäherung. Den vollkommen harten Stahl definiren wir als einen unseren Gleichungen folgenden Körper von der Magnetisirungsconstanten Eins, in dessen Innern wahrer Magnetismus vorkommen kann in beliebiger Vertheilung, jedoch so, dass die Gesammtmenge des in jedem Stahlstück vorhandenen wahren Magnetismus wiederum von Null nicht abweicht.

#### Stationäre Zustände.

Für den Zustand der stationären Bewegungen gelten in den Nichtleitern die gleichen Bedingungen, wie für den statischen Zustand; in den Leitern, welche wir in diesem Abschnitt der Einfachheit halber als isotrop voraussetzen, nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen (9<sub>a</sub>), (9<sub>b</sub>), (9<sub>c</sub>) die Form an:

$$(15_a) \begin{cases} \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \\ \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0, \\ \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0; \end{cases} \quad (15_b) \begin{cases} \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi A u, \\ \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} = 4\pi A v, \\ \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} = 4\pi A w. \end{cases}$$

$$(15_e) \quad u = \lambda (X - X'), \quad v = \lambda (Y - Y'), \quad w = \lambda (Z - Z').$$

Differenzieren wir die Gleichungen (15<sub>b</sub>) beziehungsweise nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und addieren sie, so folgt:

$$(15_a) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

welche Gleichung an Flächen, an welchen sich die Strömungen sprungweise ändern, die Form annimmt:

$$(15_0) (u_2 - u_1) \cos n, x + (v_2 - v_1) \cos n, y + (w_2 - w_1) \cos n, z = 0.$$

Fügen wir die Gleichungen (15<sub>a</sub>) und (15<sub>b</sub>) den Gleichungen (15<sub>c</sub>) und (15<sub>d</sub>) hinzu, so erhalten wir ein System, welches lediglich die elektrischen Kräfte enthält. Dasselbe kann ohne Rücksicht auf die magnetischen Kräfte behandelt werden und giebt uns die Theorie der Stromvertheilung. Sind die Componenten  $u, v, w$  der Strömung gefunden, so ergibt uns weiter die Behandlung der Gleichungen (15<sub>a</sub>) die von diesen Strömungen ausgeübten magnetischen Kräfte.

## 15. Vertheilung stationärer Ströme.

Es erhellt aus den Gleichungen (15<sub>a</sub>), dass die Kräfte auch im Innern der durchströmten Leiter noch als die negativen Differentialquotienten einer Function  $\varphi$ , des Potentials, dargestellt werden können, welches durch die Bedingung bestimmt ist, dass überall sein muss:

$$(15_r) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda X') \\ \qquad \qquad \qquad -\frac{\partial}{\partial y} (\lambda Y') - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda Z'). \end{cases}$$

An der Grenzfläche zweier heterogener Leiter nimmt diese Gleichung die Form an:

$$(15_g) \begin{cases} \lambda_2 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_2 - \lambda_1 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_1 = -(\lambda_2 Y'_2 - \lambda_1 Y'_1) \cos n, x \\ -(\lambda_2 Y'_2 - \lambda_1 Y'_1) \cos n, y - (\lambda_2 Z'_2 - \lambda_1 Z'_1) \cos n, z, \end{cases}$$

also an der Grenze eines Leiters gegen einen Nichtleiter die Form:

$$(15_n) \quad \frac{d\varphi}{dn} = -X' \cos n, x - Y' \cos n, y - Z' \cos n, z.$$

Zu diesen Grenzbedingungen kommt noch in solchen Grenzflächen, in welchen die elektromotorischen Kräfte unendlich werden, nach Abschnitt 8 die weitere Bedingung hinzu:

$$(15_n) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z) dn, \\ &= \int (X' \cos n, x + Y' \cos n, y + Z' \cos n, z) dn, \\ &= \varphi_{1,2}. \end{aligned} \right.$$

Die Gesamtheit dieser Bedingungen bestimmt  $\varphi$  eindeutig für das ganze Innere der Leiter bis auf eine Constante, welche von den Zuständen ausserhalb der Leiter abhängig bleibt. Für homogene Leiter nehmen die Gleichungen (15,) bis (15,) die einfacheren Gestalten an:

$$(15_n) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ für das Innere der Leiter,} \\ \lambda_1 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_1 &= \lambda_2 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_2 \text{ für die Grenze zweier Leiter,} \\ \frac{d\varphi}{dn} &= 0 \text{ für die Grenze gegen einen Nichtleiter,} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \varphi_{1,2} \text{ an einer elektromotorisch wirksamen Grenzfläche.} \end{aligned} \right.$$

Die so erlangten Gleichungen gestatten die unmittelbare Anwendung auf Probleme der Stromvertheilung in dreifach ausgedehnten Körpern. Ihre Anwendung auf die Strömung in flächenförmig ausgedehnten Leitern oder auf lineare Stromträger ist leicht und ergiebt die Definition des Widerstandes, das Ohm'sche Gesetz für geschlossene Strombahnen, die Kirchhoff'schen Sätze für beliebige Verzweigungen, sowie die übrigen allgemeinen Sätze über die Vertheilung stationärer Ströme.

#### 16. Magnetische Kräfte stationärer Ströme.

Um zunächst überall aus den nunmehr bekannten Stromcomponenten  $u, v, w$  die durch sie hervorgerufenen Kräfte  $L, M, N$  zu bestimmen, führen wir als Hilfsgrössen die so-

genannten Componenten des Vectorpotentials ein, indem wir setzen:

$$U = \int \frac{u}{r} d\tau, \quad V = \int \frac{v}{r} d\tau, \quad W = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

Die Integrale sind über den ganzen Raum zu erstrecken; infolge der Bedingungen des stationären Zustandes wird dabei:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Wir setzen nun:

$$(16.) \quad \begin{cases} L = A \left( \frac{dV}{dx} - \frac{dW}{dy} \right), & M = A \left( \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right), \\ N = A \left( \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right). \end{cases}$$

Diese  $L, M, N$  sind Lösungen der Gleichungen (15.) und genügen der Gleichung:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0.$$

Wenn sich also auch die wirklich vorhandenen Kräfte von ihnen unterscheiden können, so genügen doch die Unterschiede beider den Bedingungen für die Kräfte ruhender Magnetismen, und können als von solchen herrührend angesehen werden, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass diese Magnetismen ihrerseits wiederum durch die Strömungen veranlasst seien. Sind aber insbesondere ruhende Magnetismen nicht vorhanden, so stellen die angegebenen Formen die vorhandenen magnetischen Kräfte vollständig dar.

Haben wir es nur mit linearen Stromleitern zu thun, in welchen die Stromstärke  $i$  herrscht, so treten in den Werthen der  $U, V, W$  an Stelle der Ausdrücke  $u d\tau, v d\tau, w d\tau$  die Ausdrücke  $i dx, i dy, i dz$ , wobei  $dx, dy, dz$  die Projectionen des Elementes  $ds$  der Strombahn auf die drei Axen sind, und die Integrationen alsdann längs der Stromwege um deren ganzen Umfang genommen werden müssen. Wollen wir die magnetischen Kräfte der gesammten Strömung als die Summen der Wirkungen der einzelnen Stromelemente ansehen, so giebt eine ihren Resultaten nach zulässige Zerlegung unserer Integrale für die Wirkung des Stromelementes  $i dx$  auf den Punkt  $x' y' z'$ ,

wenn wir zur Vereinfachung der Formeln das Element in den Nullpunkt und den Punkt  $x' y' z'$  in die  $xy$ -Ebene bringen:

$$L=0, \quad M=0, \quad N=Aidx \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} = -\frac{Aidx}{r^2} \cdot \frac{y'}{r},$$

welche Formeln der Ampère'schen Regel und dem Biot-Savart'schen Gesetz Ausdruck verleihen.

Die gefundenen Werthe der Kräfte müssen zufolge der Gleichungen (15<sub>b</sub>) überall da, wo die  $u, v, w$  verschwinden, also überall ausserhalb der durchströmten Leiter ein Potential  $\psi$  besitzen, dessen negativen Differentialquotienten wir sie gleich setzen können. Rühren die Kräfte nur her von einer einzigen geschlossenen linearen Strombahn, so kann dies Potential dargestellt werden in der Form:

$$(16_b) \quad \psi = -Ai \int \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\omega + \text{constans},$$

worin  $d\omega$  das Element einer beliebigen durch die Strombahn gelegten Fläche,  $n$  die Normale dieser Fläche bedeutet und die Integration über den ganzen von der Strombahn begrenzten Bereich der Fläche zu erstrecken ist. Als positiv ist dabei diejenige Seite der Fläche gerechnet, von welcher aus gesehen der positiv gerechnete Strom im Sinne der Drehung des Uhrzeigers fliesst. Durch bekannte Integraltransformationen werden nämlich die negativen Differentialquotienten des angegebenen Ausdruckes überall in die für  $L, M, N$  gefundenen Formen gebracht, diese Differentialquotienten sind also überall ausser in der Strombahn selbst endlich und stetig, und wenn auch das in  $\psi$  enthaltene Integral an der Fläche  $\omega$  unstetig wird, so kann dem ganzen  $\psi$  nichtsdestoweniger die erforderliche Stetigkeit verliehen werden, indem wir die darin enthaltene Constante als unendlich vieldeutig betrachten und jedesmal einen um  $4\pi Ai$  geänderten Werth derselben benutzen, sobald wir die Fläche  $\omega$  durchschreiten. Das Potential wird dadurch selbst unendlich vieldeutig und ändert sich um  $4\pi Ai$ , sobald wir nach einmaliger Umkreisung der Strombahn zum Ausgangspunkte zurückkehren.

Dem Integralausdruck, welcher in  $\psi$  vorkommt, können verschiedene Deutungen untergelegt werden. Er kann zunächst

betrachtet werden als das Potential einer magnetischen Doppelschicht. Durch Verfolg dieser Auffassung gelangen wir zu der Ampère'schen Theorie des Magnetismus. Es kann andererseits mit Gauss der Werth jenes Integrales in einem bestimmten Punkte gedeutet werden als der sphärische Winkel, unter welchem, von dem Punkte aus gesehen, die Strombahn erscheint. Von hieraus ergibt uns ein leichter Uebergang die Richtigkeit der Aussage: es stelle jenes Integral für einen Punkt die Zahl der Kraftlinien dar, welche ein in dem Punkte aufgestellter Einheitspol durch die Strombahn sendet. Das ganze Potential, einschliesslich seiner Vielseitigkeit, kann hieran anknüpfend gedeutet werden durch die Aussage: es sei die Differenz seiner Werthe in zwei Punkten gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der Kraftlinien, welche in bestimmter Richtung die Strombahn durchschneiden, wenn ein Einheitspol auf beliebigem Wege aus dem einen Punkte in den anderen übergeführt wird.

Die letztgenannte Deutung ist von unserem Standpunkte aus die angemessenste, auch erlaubt sie uns unter Berufung auf die Lehren der Abschnitte 12 und 14 die folgenden Schlüsse aneinander zu reihen. Erstens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen Magnetpol oder auch ein System unveränderlicher Magnetismen in der Nähe eines constant gehaltenen linearen Stromes zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien des Magnetpoles oder des magnetischen Systemes, welche bei der Bewegung die Strombahn in bestimmter Richtung durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke und der Constanten  $A$ . Zweitens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen constant gehaltenen Strom in einem beliebigen magnetischen Felde zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien, welche bei der Verschiebung von der Strombahn durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stärke des Stromes und der Constanten  $A$ . Endlich also im Besonderen: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen constant gehaltenen Strom 1 in der Nähe eines constant gehaltenen Stromes 2 zu verschieben, ist gleich der Zahl der magnetischen Kraftlinien der Strombahn 2, welche von der Strombahn 1 bei der Bewegung durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stromstärke in 1 und der Constanten  $A$ . Mit dem gleichen Rechte ist diese Arbeit auch gleich der Zahl der Kraftlinien

des Stromes 1, welche bei der Verschiebung die Strombahn 2 durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke in 2 und der Constanten  $A$ . Beide Aussagen führen zu dem gleichen Resultat; wir beweisen dies, indem wir das Product aus der Intensität der einen Strombahn und der Zahl der sie durchsetzenden Kraftlinien der anderen Strombahn durch einen in Hinsicht beider symmetrischen Ausdruck darstellen. Beziehen sich nämlich die Bezeichnungen  $i, ds$  auf die Strombahn 1;  $i', ds'$ ,  $U', V', W', L', M', N'$  auf die Strombahn 2, so ist die mit  $Ai$  multiplicirte Zahl der Kraftlinien von 2, welche 1 durchsetzen, gleich:

$$\begin{aligned} & Ai \int (L' \cos n, x + M' \cos n, y + N' \cos n, z) d\omega \\ &= A^2 i \int \left\{ \left( \frac{dV'}{ds} - \frac{dW'}{dy} \right) \cos n, x + \left( \frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz} \right) \cos n, y \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{dU'}{dy} - \frac{dV'}{dx} \right) \cos n, z \right\} d\omega \\ &= -A^2 i \int (U' \cos s, x + V' \cos s, y + W' \cos s, z) ds \\ &= -A^2 i i' \iint \frac{\cos s, x \cos s', x + \cos s, y \cos s', y + \cos s, z \cos s', z}{r} ds ds' \\ &= -A^2 i i' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds', \end{aligned}$$

worin  $\varepsilon$  den Winkel bezeichnet, welchen die beiden Stromelemente im Raum miteinander bilden. Der erlangte Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf beide Strombahnen. Man weiss, dass in der That die Aenderungen dieses Ausdruckes, des mit  $A^2 ii'$  multiplicirten Neumann'schen Potentials der einen Strombahn auf die andere, die zur gegenseitigen Verschiebung geschlossener Ströme erforderliche Arbeit und daraus die zwischen den ruhenden Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte ergeben. Man weiss auch, dass diese Aussage Alles enthält, was man in Hinsicht der zwischen Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit behaupten kann.

Wir berechnen noch die magnetische Energie eines Raumes, in welchem die stationären Stromcomponenten  $u, v, w$  und die unveränderlichen magnetischen Dichten  $m$  vertheilt sind, unter der beschränkenden Voraussetzung, dass sich magnetisierbare Körper in dem Raume nicht vorfinden. Verstehen wir jetzt unter  $\psi$

das Potential der Magnetismen  $m$ , so erhalten wir die Energie successive in den Formen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau \\
 &= \frac{A}{8\pi} \int \left\{ L \left( \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} - \frac{1}{A} \frac{d\psi}{dx} \right) + M \left( \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} - \frac{1}{A} \frac{d\psi}{dy} \right) \right. \\
 & \quad \left. + N \left( \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} - \frac{1}{A} \frac{d\psi}{dz} \right) \right\} d\tau \\
 &= \frac{A}{8\pi} \int \left\{ U \left( \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right) + V \left( \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \right) \right. \\
 & \quad \left. + W \left( \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \right) \right\} d\tau \\
 & \quad + \frac{1}{8\pi} \int \psi \left( \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{2} A^2 \int (Uu + Vv + Ww) d\tau + \frac{1}{2} \int \psi m d\tau, \\
 & \text{oder in Anwendung auf lineare Ströme:} \\
 &= \frac{1}{2} A^2 \iint \frac{ii' \cos \alpha}{r} ds ds' + \frac{1}{2} \int \psi m d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{16_e}$$

wobei in dem ersten Theile der letzten Form die Integration sowohl nach  $ds$  als nach  $ds'$  über alle vorhandenen Ströme auszudehnen ist. Es erhellt aus dieser letzten Form, dass die Verschiebung unveränderlicher Magnete und unveränderlicher Ströme gegeneinander die magnetische Energie des Raumes nicht verändert. Es findet daher auch die mechanische Arbeit, welche bei solcher Verschiebung verbraucht wird, nicht in der Aenderung der magnetischen Energie des Raumes ihre Compensation, wie es bei der Verschiebung unveränderlicher Magnete gegeneinander der Fall ist, sondern es muss von dem Verbleib der aufgewandten Arbeitsmenge anderweitig Rechenschaft abgelegt werden. Es erhellt ferner aus der gleichen Form, dass die Verschiebung constant gehaltener Ströme gegeneinander allerdings eine Aenderung der Energie des Raumes bedingt, welche dem absoluten Werth nach der aufgewandten mechanischen Arbeit gleich ist. Aber die Berücksichtigung der Vorzeichen ergibt, dass die Aenderung nicht in solchem Sinne erfolgt, dass dieselbe als Compensation der verlorenen mechanischen Energie könnte angesehen werden, sondern in entgegengesetztem Sinne. Es ist also in diesem Falle noch Rechenschaft abzulegen über

den Verbleib des Doppelten der Arbeitsmenge, welche die mechanischen Kräfte bei der relativen Verschiebung der Strombahnen leisten. Diese Rechenschaft wird am Ende des folgenden Abschnittes abgelegt werden.

### Dynamische Erscheinungen.

Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der möglichen Formen des veränderlichen Zustandes sind bisher verhältnissmässig wenige Gruppen von Erscheinungen der Beobachtung entgegengetreten. Wir führen diese Gruppen auf, ohne das Gebiet durch eine systematische Eintheilung damit erschöpfen zu wollen.

#### 17. Induction in geschlossenen Bahnen.

In einem sich verändernden magnetischen Felde müssen zufolge der Gleichungen (9<sub>a</sub>) nothwendiger Weise elektrische Kräfte verbreitet sein. Diese Kräfte sind im allgemeinen sehr schwach, weil ihre Werthe den sehr kleinen Factor  $A$  enthalten; sie sind aus diesem Grunde der Wahrnehmung nur zugänglich durch den Strom, welchen sie in geschlossenen Leitungsbahnen erregen oder dadurch, dass sich ihre Wirkung in sehr langen, bis auf einen kleinen Bruchtheil ihrer Länge geschlossenen linearen Bahnen addirt. Die in den Versuchen messbar werdenden Wirkungen geben uns daher stets nur die Integralwirkung der elektrischen Kraft in einer geschlossenen Bahn, also das Integral  $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$  genommen über eine in sich zurücklaufende Linie. Nach einer schon benutzten bekannten Integraltransformation ist dies Linienintegral gleich dem Flächenintegral:

$$\int \left\{ \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n, x + \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n, y + \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n, z \right\} d\omega,$$

genommen über eine von der fraglichen Linie rings begrenzte, übrigens aber beliebige Fläche  $\omega$ . Unter Benutzung der Gleichungen (9<sub>a</sub>) wird aber dieser Ausdruck gleich:

$$A \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{L} \cos n, x + \mathfrak{M} \cos n, y + \mathfrak{N} \cos n, z) d\omega.$$

In Worten ausgedrückt ist demnach die in einer geschlossenen Strombahn sich zeigende elektromotorische Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Aenderung der Anzahl der die Strombahn durch-

setzenden magnetischen Kraftlinien, berechnet auf die Zeiteinheit. Rührt insbesondere die Induction her von einem geschlossenen veränderlichen Strome, und ist die Nachbarschaft magnetisirbarer Körper ausgeschlossen, so ist die erregte elektromotorische Kraft nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes gleich dem mit  $A^2$  multiplicirten Product des Neumann'schen Potentials der beiden Strombahnen aufeinander und der auf die Zeiteinheit berechneten Aenderung der Intensität des inducirenden Stromes. Diese Sätze, von welchen der erstere der allgemeinere ist, umfassen in ihren Folgerungen vollständig die thatsächlich beobachteten Erscheinungen der Induction in ruhenden Leitern.

Die Induction in bewegten Leitern liegt im Grunde ausserhalb des Gebietes, auf welches sich die gegenwärtige Untersuchung beschränkt. Handelt es sich aber um lineare Leiter, so können wir diese Form der Induction an die Induction in ruhenden Leitern anschliessen durch die Aussage, dass es für die elektromotorische Kraft in einer geschlossenen Bahn gleichgültig sei, ob das unmittelbar umgebende magnetische Feld sich ändert infolge von Bewegung ponderabler Körper oder infolge rein elektromagnetischer Zustandsänderungen, dafern nur die Aenderung des unmittelbar umgebenden magnetischen Feldes die gleiche ist. Zufolge dieser Aussage und des Vorangegangenen ist die in einer bewegten Stromleitung inducirte elektrische Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Strombahn in bestimmter Richtung durchschnitten werden. Das Product aus dieser elektrischen Kraft und der Intensität des Stromes in der bewegten Strombahn giebt nach Abschnitt 11 die in der Strombahn mittelst der Induction erzeugte thermische oder chemische Arbeit an. Dieselbe ist demnach zufolge der Ergebnisse des vorigen Abschnittes, ergänzt durch eine genaue Berücksichtigung der Vorzeichen, gleich der mechanischen Arbeit, welche die den Stromkreis bewegenden äusseren Kräfte leisten müssen. Wird also ein constant gehaltener Strom bewegt gegen feste Magnete, so compensirt die in dem Stromkreis erzeugte thermische und chemische Energie die geleistete mechanische Arbeit, während die magnetische Energie des Systems unberührt bleibt. Wird dagegen ein constant gehaltener Strom bewegt gegen einen anderen constant gehaltenen Strom, so compensirt

die in dem einen Stromkreise infolge der Bewegung mehr auftretende chemische und thermische Energie die geleistete mechanische Arbeit; die gleiche in dem anderen Stromkreise infolge der Bewegung mehr auftretende Energie compensirt die Verminderung der magnetischen Energie des Feldes. Oder genauer gesprochen, es compensirt die Summe der erstgenannten Energiemengen die Summe der letztgenannten. Die am Schlusse des Abschnittes 16 geforderte Rechenschaft ist damit abgelegt.

#### 18. Elektrodynamik ungeschlossener Ströme.

In Hinsicht der möglichen Erfahrung ist dieses Gebiet das reichste von allen, denn es umfasst alle diejenigen Probleme, welche wir nicht als besondere Fälle anderen Gebieten zuthellen können. In Hinsicht der wirklichen Erfahrung ist es indessen bislang sehr arm. Die Schwingungen ungeschlossener Inductionsapparate oder sich entladender Leydener Flaschen können in hinreichender Annäherung nach den Grundsätzen des vorigen Abschnittes behandelt werden, und im eigentlichen Verstande gehören demnach hierher bislang nur die elektrischen Wellen und Schwingungen von kurzer Wellenlänge, welche in den vorausgesandten Arbeiten behandelt worden sind. Für die theoretische Behandlung dieses Abschnittes genüge es daher, auf jene Arbeiten zu verweisen und hervorzuheben, dass eine Eintheilung der elektrischen Kraft in einen elektrostatischen und einen elektrodynamischen Theil in diesen allgemeinen Problemen weder eine klar zu fassende physikalische Bedeutung, noch einen nennenswerthen mathematischen Nutzen mit sich führt, daher im Gegensatz zu früheren Behandlungsweisen zweckmässig vermieden wird.

#### 19. Lichtbewegung in isotropen Körpern.

In das Gebiet der Optik verweisen wir diejenigen elektrodynamischen Bewegungen, welche der Zeit nach rein periodisch sind und deren Periode einen sehr kleinen Bruchtheil der Secunde, sagen wir den billionten Theil derselben, nicht überschreitet. Keines der Mittel, durch welches wir befähigt sind, solche Bewegungen wahrzunehmen, gestattet uns, die magnetischen und elektrischen Kräfte als solche zu erkennen; was wir wahrzunehmen vermögen, sind lediglich die geometrischen Verhältnisse, nach welchen sich die vorhandene Bewegung in

verschiedener Richtung mit verschiedener Intensität fortpflanzt. Auch die mathematische Darstellung der Erscheinungen wird sich daher darauf beschränken dürfen, nach Elimination der entgegengesetzten Art die Ausbreitung einer der beiden Kraftarten zu verfolgen, und es wird gleichgültig sein, an welche von beiden Arten dabei die Betrachtung anknüpft. Beschränken wir uns auf homogene isotrope Nichtleiter, so erhalten wir aus den Gleichungen (4<sub>a</sub>) und (4<sub>b</sub>) durch Elimination, das eine mal der elektrischen, das andere mal der magnetischen Kraftkomponenten die hier zu benutzenden Formen:

$$(19_a) \begin{cases} A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 L}{dt^2} = \Delta L, \\ A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 M}{dt^2} = \Delta M, \\ A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 N}{dt^2} = \Delta N, \\ \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0. \end{cases} \quad (19_b) \begin{cases} A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 X}{dt^2} = \Delta X, \\ A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Delta Y, \\ A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 Z}{dt^2} = \Delta Z, \\ \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \end{cases}$$

deren Lösungen, rein periodische Bewegungen vorausgesetzt, stets auch Lösungen der Gleichungen (4<sub>a</sub>) und (4<sub>b</sub>) sind. Jedes der beiden Gleichungssysteme (19<sub>a</sub>) und (19<sub>b</sub>) lässt die Möglichkeit von Transversalwellen, die Unmöglichkeit von Longitudinalwellen erkennen; jedes der beiden Systeme ergibt für die Geschwindigkeit der möglichen Wellen den Werth:

$$1 / A \sqrt{\varepsilon \mu};$$

aus jedem der beiden Systeme lassen sich die Erscheinungen der geradlinigen Ausbreitung, der Beugung, der Interferenz des natürlichen und des polarisirten Lichtes ableiten und die verschiedenen Arten der Polarisation verstehen. Ein Zurückgreifen auf die Gleichungen (4<sub>a</sub>) und (4<sub>b</sub>) ergibt dabei, dass die Richtungen der gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Kraft in einem jeden Punkte einer ebenen Welle beständig aufeinander senkrecht stehen.

Lassen wir die Grenzebene zweier isotropen, homogenen Nichtleiter mit der  $xy$ -Ebene zusammenfallen, so gelten an dieser Grenzebene zufolge des Abschnittes 8 und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass wir es nur mit periodischen Bewegungen zu thun haben, die Bedingungen:

$$(19_3) \begin{cases} L_1 = L_2, \\ M_1 = M_2, \\ \mu_1 N_1 = \mu_2 N_2. \end{cases} \quad (19_4) \begin{cases} X_1 = X_2, \\ Y_1 = Y_2, \\ \epsilon_1 Z_1 = \epsilon_2 Z_2. \end{cases}$$

Jedes dieser Systeme von Grenzgleichungen ergibt zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere beider Körper die Gesetze der Reflexion, der Brechung, der totalen Reflexion, also die Grundlagen der geometrischen Optik. Jedes derselben lässt auch erkennen, dass die Intensität reflectirter und gebrochener Wellen von der Art ihrer Polarisirung abhängig ist und ergibt für diese Abhängigkeit, sowie für die Phasenverzögerung der total reflectirten Wellen die Fresnel'schen Formeln. Leiten wir diese Formeln aus den Gleichungen der elektrischen Kräfte (19<sub>3</sub>) und (19<sub>4</sub>) her, so entspricht unsere Entwicklung der von Fresnel selbst gegebenen Ableitung dieser Formeln. Halten wir uns an die Gleichungen der magnetischen Kraft (19<sub>3</sub>) und (19<sub>4</sub>), so nähern wir uns dem von F. Neumann zur Ableitung der Fresnel'schen Gleichungen angegebenen Pfade. Von unserem allgemeineren Standpunkte aus lässt sich nicht allein von vornherein überblicken, dass beide Wege zum gleichen Ziele führen müssen, sondern auch erkennen, dass beide mit gleicher Berechtigung beschritten werden können. Dass in den wirklich beobachteten Erscheinungen der Reflexion die elektrischen und magnetischen Kräfte nicht völlig miteinander vertauschbar sind und beide Wege verschieden erscheinen, hat seinen Grund in dem Umstande, dass für alle in Betracht kommenden Körper die Magnetisirungsconstanten fast gleich und gleich Eins sind, während die Dielektricitätsconstanten merklich verschieden sind, und dass also hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper deren optisches Verhalten bestimmen.

Bildet die  $xy$ -Ebene die Grenze unseres Nichtleiters gegen einen vollkommenen Leiter, so gelten in dieser Ebene die Gleichungen:

$$(19_5) \quad N = 0, \\ (19_6) \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

Dieselben lassen zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere des Nichtleiters erkennen, dass bei jedem Einfallswinkel und jedem Azimuth der Polarisirung die Reflexion eine totale ist. Da die wirklichen Leiter zwischen den vollkommenen

Leitern und den Nichtleitern die Mitte halten, so wird die Reflexion an ihnen einen Uebergang bilden zwischen der totalen Reflexion und der Reflexion an durchsichtigen Körpern. Da die Metallreflexion eine derartige Stellung einnimmt, so lässt sich übersehen, dass unsere Gleichungen geeignet sein werden, ein allgemeines Bild auch der Metallreflexion zu geben. Wie weit in die Einzelheiten hinein aber die Wiedergabe durch passende Wahl der Constanten sich erstrecken lässt, scheint bisher noch nicht genügend untersucht zu sein.

Dass die Erscheinungen der Dispersion die Einführung mindestens zweier elektrischen oder zweier magnetischen Grössen erfordern und deshalb ausserhalb des Bereichs unserer gegenwärtigen Theorie liegen, ist schon im ersten Abschnitt erwähnt worden.

## 20. Krystalloptik.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf die Lichtbewegung im Innern eines homogenen, vollkommen durchsichtigen Krystalles, von welchem wir des weiteren voraussetzen, dass die Symmetrieeaxen der elektrischen und der magnetischen Energie zusammenfallen. Legen wir die Coordinatenaxen diesen gemeinschaftlichen Symmetrieeaxen parallel und setzen der Einfachheit halber für:

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33} \text{ jetzt } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3,$$

so nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen (5<sub>a</sub>) und (5<sub>b</sub>) die Form an:

$$(20_a) \begin{cases} A\mu_1 \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu_2 \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu_3 \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (20_b) \begin{cases} A\varepsilon_1 \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A\varepsilon_2 \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A\varepsilon_3 \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden integrirt durch die Annahme ebener Wellen geradlinig polarisirten Lichtes, welche den folgenden Aussagen entsprechen: Auf der elektrischen Polarisation steht die magnetische Kraft, auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht. Die Richtung der beiden Kräfte tritt im allgemeinen aus der Wellenebene heraus, die Richtung

der beiden Polarisationen liegt in der Wellenebene. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist also die Wellennormale; die Richtung, welche auf den beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung, in welcher sich zufolge Abschnitt 11 die Energie fortpflanzt, sie heisst in der Optik der Strahl. Jeder gegebenen Lage der Wellennormale entsprechen im allgemeinen zwei mögliche Wellen von verschiedener Polarisation, verschiedener Geschwindigkeit und verschiedener Lage des zugehörigen Strahles. Lassen wir in einem bestimmten Augenblicke vom Nullpunkt des Coordinatensystems ebene Wellen mit allen möglichen Lagen der Wellennormale ausgehen, so umhüllen diese Wellenebenen nach der Zeiteinheit eine Fläche, die sogenannte Wellenfläche. Jede einzelne Wellenebene berührt die Wellenfläche in einem Punkte des durch den Nullpunkt gelegten zugehörigen Strahles. Als Gleichung der von den Wellenebenen umhüllten Fläche wird gefunden:

$$(20.) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{x^2}{\varepsilon_1} + \frac{y^2}{\varepsilon_2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3} \right) \left( \frac{x^2}{\mu_1} + \frac{y^2}{\mu_2} + \frac{z^2}{\mu_3} \right) - \frac{x^2}{\varepsilon_1 \mu_1} \left( \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right) \\ & - \frac{y^2}{\varepsilon_2 \mu_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1} + \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right) - \frac{z^2}{\varepsilon_3 \mu_3} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche vierten Grades schneidet die Coordinatenebenen in je zwei Ellipsen. In einer der Coordinatenebenen schneiden sich die beiden Ellipsen in vier Punkten, welches vier Nabelpunkte der Fläche sind; in den beiden anderen Coordinatenebenen umschliesst die eine Ellipse die andere, und zwar gelten diese Aussagen, welches auch die Werthe der  $\varepsilon$  und  $\mu$  sind. Für alle wirklichen Krystalle ist mit sehr grosser Annäherung  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ; für diesen Fall reducirt sich die allgemeine Form der Gleichung auf die der Fresnel'schen Wellenfläche und von den beiden Ellipsen, in welchen die Fläche jede der Coordinatenebenen schneidet, reducirt sich je eine auf einen Kreis.

Man weiss, dass sich an die Betrachtung der Wellenfläche und ihrer Ausartungen in besonderen Fällen die Erklärung der Doppelbrechung, der Reflexion an Krystallflächen, vieler der in Krystallen beobachteten Interferenzerscheinungen anknüpft. Andere Thatsachen der Krystalloptik lassen sich hinwiederum

nicht bewältigen durch den Verfolg einer einzigen elektrischen und einer einzigen magnetischen Richtungsgrösse; diese That-  
sachen liegen daher ausserhalb des Bereiches unserer Theorie in  
ihrem gegenwärtigen Umfang.

Wir haben in den Nummern 17—20 die Aufzählung der-  
jenigen Fälle des veränderlichen Zustandes erschöpft, deren  
Wichtigkeit bislang zur Entwicklung besonderer Theorien Ver-  
anlassung gegeben hat.

## 14. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper.

(Wiedemann's Ann. 41. p. 869. 1890.)

Eine Darstellung der elektrodynamischen Vorgänge in ruhenden Körpern, welche ich vor kurzem veröffentlichte,<sup>1)</sup> fiel dem Inhalte nach zusammen mit der Theorie Maxwell's, genügte aber in Hinsicht der Form grösseren Ansprüchen an systematische Ordnung. Von vornherein und mit Strenge war die Anschauung zur Geltung gebracht, dass elektrische und magnetische Kräfte in jedem Punkte ihrer Wirksamkeit besonderen Zuständen des daselbst befindlichen raumerfüllenden Mittels entsprechen und dass die Ursachen, welche das Zustandekommen und die Aenderungen dieser Zustände bedingen, unter Ausschluss jeder Fernwirkung lediglich in den Verhältnissen der unmittelbaren Nachbarschaft zu suchen seien. Es war weiter vorausgesetzt worden, dass der elektrische und magnetische Zustand des raumerfüllenden Mittels für jeden Punkt vollständig bestimmt sei durch je eine einzige Richtungsgrösse und es hatte sich gezeigt, dass die Beschränkung, welche in dieser Voraussetzung liegt, nur minder bedeutungsvolle Erscheinungen von der Betrachtung ausschloss. Die Einführung von Potentialen in die Grundgleichungen war vermieden.

Es tritt nun die Frage auf, ob unter strenger Festhaltung an den gleichen Anschauungen und an den gleichen Beschränkungen die Theorie so erweitert werden könne, dass sie auch den Ablauf der elektrodynamischen Erscheinungen in bewegten

<sup>1)</sup> Siehe No. 13. p. 208.

Körpern umfasst. Wir beachten zunächst, dass wenn von bewegten Körpern schlechthin die Rede ist, wir stets nur an die Bewegung der ponderablen Materie denken. Die gleichzeitig eintretenden Bewegungen des Aethers aber können nach unserer Anschauung nicht ohne Einfluss sein und von diesen haben wir keine Kenntniss. Damit ist schon gesagt, dass ohne die Einführung willkürlicher Annahmen über die Bewegung des Aethers die aufgeworfene Frage zur Zeit überhaupt nicht behandelt werden könne. Es lassen uns ferner die wenigen vorliegenden Andeutungen über die Bewegung des Aethers vermuthen, dass die gestellte Frage streng genommen zu verneinen sei. Es scheint nämlich aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Inneren der greifbaren Materie sich unabhängig von dieser bewege; diese Vorstellung ist sogar kaum zu umgehen angesichts der Thatsache, dass wir aus keinem umschlossenen Raume den Aether entfernen können. Wollen wir nun dieser Vorstellung unsere Theorie anpassen, so haben wir in jedem Punkte des Raumes die elektromagnetischen Zustände des Aethers und der greifbaren Materie in gewissem Sinne als unabhängig zu betrachten. Die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern gehören alsdann zur Classe derjenigen, welche sich nicht bewältigen lassen, ohne die Einführung mindestens je zweier Richtungsgrößen für den elektrischen und den magnetischen Zustand.

Anders liegt die Sache, wenn wir uns ausgesprochenermaassen begnügen, die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne in dem Umfange darzustellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind. Wir dürfen behaupten, dass unter den so eingeschränkten Erscheinungen sich keine findet, welche uns zwingt, eine von der ponderablen Materie unabhängige Bewegung des Aethers im Inneren derselben zuzugeben; es geht dies schon aus dem Umstande hervor, dass aus dieser Classe von Erscheinungen ein Anhalt über die Grösse der gegenseitigen Verschiebung nicht gewonnen wird. Wenigstens die eigentlichen elektrischen und magnetischen Erscheinungen müssen sich also vertragen mit der Vorstellung, dass eine solche Verschiebung überhaupt nicht stattfindet, dass vielmehr der hypothetisch im Inneren der ponderablen Materie vorausgesetzte Aether sich nur zugleich mit dieser bewege.

Diese Vorstellung schliesst die Möglichkeit ein, in jedem Punkte des Raumes nur die Zustände eines einzigen raumerfüllenden Mittels in Betracht zu ziehen, sie gestattet hierdurch, die aufgeworfene Frage zu bejahen. Wir adoptiren sie für die vorliegende Abhandlung. Die auf solcher Grundlage aufgebaute Theorie wird dann freilich nicht den Vorzug besitzen, auf jede ihr vorgelegte Frage die richtige oder auch nur eine bestimmte Antwort zu geben; sie giebt aber wenigstens auf jede ihr vorgelegte Frage mögliche Antworten an, d. h. Antworten, welche weder mit den beobachteten Erscheinungen, noch mit den an ruhenden Körpern gewonnenen Anschauungen in Widerspruch treten.

Wir setzen also voraus, dass dem raumerfüllenden Mittel in jedem Punkte eine einzige bestimmte Geschwindigkeit beizulegen sei, deren Componenten in Richtung der  $x, y, z$  wir mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnen. Wir sehen diese Grössen überall als endlich an und behandeln sie als stetig von Punkt zu Punkt veränderlich. Unstetige Aenderungen lassen wir zwar auch zu, behandeln sie aber nur als den Grenzfall einer sehr schnellen stetigen Aenderung. Ausserdem unterwerfen wir jede zulässige Unstetigkeit der Beschränkung, dass sie nirgends zur Bildung leerer Räume führen darf; diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die drei Differentialquotienten  $d\alpha/dx, d\beta/dy, d\gamma/dz$  überall endlich bleiben. Wo wir im Raum greifbare Materie finden, entnehmen wir der Bewegung dieser eindeutig die Werthe der  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wo wir im Raume greifbare Materie nicht vorfinden, dürfen wir den  $\alpha, \beta, \gamma$  jeden willkürlichen Werth beilegen, welcher mit den gegebenen Bewegungen an der Grenze des leeren Raumes vereinbar und von gleicher Grössenordnung ist. Wir dürfen z. B. für  $\alpha, \beta, \gamma$  diejenigen Werthe setzen, welche sich im Aether finden würden, wenn sich derselbe wie irgend ein beliebig gewähltes Gas bewegte. Im übrigen sollen sämtliche Bezeichnungen der vorhergehenden Arbeit hier in gleicher Bedeutung übernommen werden. Elektrische und magnetische Kraft betrachten wir hier als Zeichen für den Zustand der bewegten Materie in gleichem Sinne, in welchem wir sie früher als Zeichen für die Zustände der ruhenden Materie betrachteten. Elektrische und magnetische Polarisation gelten uns nur als ein zweites gleichwerthiges Mittel, dieselben Zustände zu bezeichnen.

Auch den Kraftlinien, durch welche wir diese Polarisationen darstellen, legen wir keine andere Bedeutung bei.

#### 1. Aufstellung der Grundgleichungen für bewegte Körper.

In einem jeden Punkte eines ruhenden Körpers ist die zeitliche Aenderung des magnetischen Zustandes lediglich bedingt durch die Vertheilung der elektrischen Kraft in der Nachbarschaft des Punktes. In einem bewegten Körper kommt zu dieser Aenderung eine zweite, welche sich der ersteren in jedem Augenblick überdeckt und welche von der Verzerrung herrührt, welche die Nachbarschaft des betrachteten Punktes bei der Bewegung erleidet. Wir behaupten nun, es sei der Einfluss der Bewegung derart, dass, wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde. Oder genauer bestimmt: Denken wir uns in einem bestimmten Augenblicke den magnetischen Zustand der Substanz nach Richtung und Grösse dargestellt durch ein System von Kraftlinien, so würde ein durch die nämlichen materiellen Punkte gelegtes System von Kraftlinien auch in jedem späteren Augenblick den magnetischen Zustand nach Richtung und Grösse darstellen, wenn nämlich der Einfluss der Bewegung allein zur Geltung käme. Die entsprechende Aussage gilt für die Aenderung, welche die elektrische Polarisation durch die Bewegung erleidet. Diese Aussagen reichen hin, um die für ruhende Körper entwickelte Theorie auf bewegte Körper auszudehnen, sie genügen offenbar den Anforderungen, welche unser System an sie stellt und es wird sich zeigen, dass sie die beobachteten Thatsachen enthalten.<sup>1)</sup>

Um zunächst unsere Behauptung in Zeichen zu kleiden, fassen wir während eines Zeitelementes  $dt$  ein kleines Flächenstück im Inneren der bewegten Materie ins Auge, welches im Beginn des betrachteten Zeitelementes der  $yz$ -Ebene parallel liegt und während der Bewegung sich mit der Materie verschiebt und verzerrt. Wir ziehen die magnetischen Kraftlinien in solcher Dichte, dass im Beginn der Zeit  $dt$  das betrachtete Flächenstück von der Anzahl  $\mathfrak{L}$  derselben durchsetzt wird. Ueberall und stets ist dann durch  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  die Anzahl der Kraftlinien zu bezeichnen, welche ein gleich grosses, beziehlich der  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ -Ebene

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 33 am Schluss des Buches.]

paralleles Flächenstück durchschneiden. Die Zahl der Kraftlinien, welche unser besonderes Flächenstück durchsetzen, ändert sich nun aus verschiedenen Ursachen; wir wollen den Beitrag, welchen jede einzelne Ursache liefert, gesondert betrachten. Insofern erstens die genannte Anzahl sich verändern würde, wenn auch das Flächenstück in seiner ursprünglichen Lage verharrte, beträgt die Aenderung  $d\mathcal{L}/dt \cdot dt$ , wenn wir nämlich mit dem Symbol  $d\mathcal{L}/dt$  die Aenderungsgeschwindigkeit von  $\mathcal{L}$  in einem Punkte bezeichnen, welcher in Bezug auf unser Coordinatensystem ruht. Insofern zweitens das Flächenelement mit der Geschwindigkeit  $\alpha, \beta, \gamma$  zu Orten fortgetragen wird, an welchen andere Werthe des  $\mathcal{L}$  herrschen, beträgt die Aenderungsgeschwindigkeit  $(\alpha d\mathcal{L}/dx + \beta d\mathcal{L}/dy + \gamma d\mathcal{L}/dz) dt$ . Insofern sich drittens die Ebene des Elementes mit der Geschwindigkeit  $da/dy$  um die  $x$ -Axe und mit der Geschwindigkeit  $da/dx$  um die  $y$ -Axe dreht, werden Kraftlinien in das Element aufgenommen, welche ursprünglich demselben parallel waren, es beträgt der Beitrag aus dieser Quelle  $-(M da/dy + N da/dx) dt$ . Endlich vergrößert das Element seinen Inhalt mit der Geschwindigkeit  $d\beta/dy + d\gamma/dz$  und wächst hierdurch die betrachtete Zahl um den Betrag  $\mathcal{L}(d\beta/dy + d\gamma/dz) dt$ . Sind die aufgezählten Beiträge sämmtlich Null, so ist eine Aenderung der betrachteten Zahl nicht möglich, wir haben also die Ursachen der Aenderung erschöpft und da sämmtliche Beiträge sehr klein sind, so entspricht ihre Summe der Gesamtänderung. Wir können aber diese letztere auch in anderer, mehr physikalischer Weise zerlegen, nämlich in den Beitrag, welchen das Vorhandensein der elektrischen Kräfte in der Nachbarschaft allein und den Beitrag, welchen die Bewegung allein hervorbringen würde, wenn jedesmal die andere dieser Ursachen fehlte. Nach den für ruhende Leiter geltenden Gesetzen ist der erstere Beitrag gleich  $1/A \cdot (dZ/dy - dY/dx) dt$ ; der letztere ist nach unserer neu hinzugetretenen Behauptung gleich Null; der erstere allein stellt also schon die Gesamtänderung dar. Wir setzen die beiden für die Gesamtänderung erhaltenen Ausdrücke einander gleich, dividiren durch  $dt$ , multipliciren mit  $A$ , addiren und subtrahiren die Glieder  $\alpha dM/dy + \alpha dN/dx$ , ordnen in zweckmässiger Weise und erhalten so, indem wir die gleichen Ueberlegungen auch für die übrigen Componenten der mag-

netischen und für die Componenten der elektrischen Kraft durchführen, das folgende System der Grundgleichungen für bewegte Körper:

$$\begin{aligned}
 (1_a) \quad & \left\{ \begin{aligned} & A \left\{ \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\Omega - \alpha\mathfrak{M}) - \frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L}) + \alpha \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N}) - \frac{d}{dx}(\beta\Omega - \alpha\mathfrak{M}) + \beta \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N}) + \gamma \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{aligned} \right. \\
 (1_b) \quad & \left\{ \begin{aligned} & A \left\{ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) - \frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) + \alpha \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{Z}) - \frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) + \beta \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi Av, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{Z}) + \gamma \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi Aw. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

zu deren Vervollständigung die linearen Beziehungen gehören, welche die Polarisationen und die Strömungskomponenten mit den Kräften verbinden. Die Constanten dieser Relationen sind als Functionen der sich ändernden Zustände der bewegten Materie und insofern auch als Functionen der Zeit zu betrachten.<sup>1)</sup>

Unsere Ableitung der Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) erforderte nicht, dass das benutzte Coordinatensystem absolut im Raume ruhte. Wir können daher unsere Gleichungen von dem zuerst gewählten Coordinatensystem ohne Aenderung der Form auf jedes beliebige andere, im Raume beliebig bewegte Coordinatensystem dadurch transformiren, dass wir unter  $\alpha, \beta, \gamma$  die rela-

<sup>1)</sup> [Siehe Anmerkung 84 am Schluss des Buches.]

tiven Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das neugewählte Coordinatensystem verstehen, und ebenso die von der Richtung abhängenden Constanten  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  in jedem Augenblicke auf dieses beziehen. Daraus geht hervor, dass die absolute Bewegung eines starren Körpersystems keinen Einfluss auf irgend welche inneren elektrodynamischen Vorgänge in demselben habe, sofern nur wirklich alle in Betracht kommenden Körper, also auch der Aether, an der Bewegung theilnehmen. Es geht ferner aus dieser Ueberlegung hervor, dass wenn sich auch nur ein einzelner Theil eines bewegten Systems bewegt wie ein starrer Körper, dass dann in diesem Theile sich die Vorgänge gerade so abspielen, als wie in ruhenden Körpern. Hat also die vorhandene Bewegung dennoch einen Einfluss auf diesen Theil, so kann doch dieser Einfluss nur entstanden sein in denjenigen Gebieten des Systems, in welchen Verzerrungen der Elemente stattfinden und muss sich von dort secundär fortgepflanzt haben zu denjenigen Gebieten, welche sich nach Art starrer Körper bewegen. Wird beispielsweise eine feste Metallmasse im magnetischen Felde plötzlich verschoben, so hat nach unseren Gleichungen diese Bewegung unmittelbar, d. h. gleichzeitig nur auf die Oberfläche und die Umgebung der Metallmasse einen Einfluss und ruft hier elektrische Kräfte hervor, welche sich dann secundär, d. h. etwas später in das Innere der Masse fortpflanzen und hier Strömungen erzeugen.

Die aufgestellten Gleichungen sind nach Form und Absicht verwandt mit denjenigen, durch welche von Helmholtz im 78. Bande des Borchardt'schen Journals das Verhalten der elektrischen und magnetischen Kräfte in bewegten Körpern darstellte.<sup>1)</sup> Die Bezeichnungen sind zum Theil von dort entlehnt. Doch sind unsere Gleichungen von den dort gegebenen nicht etwa nur der Form nach verschieden, vielmehr auch dem Inhalt nach hinsichtlich solcher Glieder, welche bisher an der Erfahrung nicht geprüft werden können. Maxwell selbst scheint mir von einer consequenten Einreihung der Erscheinungen in bewegten Körpern in sein System abgesehen zu haben.<sup>2)</sup> Die zahlreichen

<sup>1)</sup> v. Helmholtz, Ges. Abhandl. 1. p. 745, Borchardt's Journ. f. Mathem. 78. p. 273. 1874.

<sup>2)</sup> [Siehe Anmerkung 35 am Schluss des Buches.]

Betrachtungen, welche er derartigen Erscheinungen widmet, beschränken sich auf Fälle, oder begnügen sich mit Annäherungen, welche eine Unterscheidung zwischen den Theorien der Fernkräfte und denen der vermittelten Wirkung nicht nöthig machen.

## 2. Physikalische Bedeutung der einzelnen Glieder.

Die Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) geben uns den zukünftigen Werth der Polarisationen in jedem festen Punkte des Raumes oder, wenn wir lieber wollen, in jedem Theilchen der bewegten Materie als eindeutig bestimmte Folgeerscheinung der gegenwärtigen elektromagnetischen Zustände und der gegenwärtigen Bewegung in der Nachbarschaft des betrachteten Punktes. Dies ist nach der Anschauung unseres Systemes die physikalische Bedeutung derselben. Ganz anders fasst die übliche Anschauung die durch jene Gleichungen gegebene Verknüpfung auf. Sie sieht in den linksstehenden Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen die Ursache, in den rechtsstehenden inducirten Kräften die Folgeerscheinung. Entstanden ist diese Vorstellung durch den Umstand, dass uns die Polarisationen und ihre Aenderungen meist eher und deutlicher bekannt werden, als die gleichzeitig stattfindenden Kräfte, dass also die linken Seiten der Gleichungen in Hinsicht unserer Kenntniss das frühere sind. Es hat auch diese Vorstellung sehr grosse Vortheile in den uns am meisten interessirenden Fällen; vom allgemeinen Standpunkte aus aber begegnet sie dieser Schwierigkeit, dass die Kräfte nicht eindeutig durch die Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen entgegengesetzter Art bestimmt sind, sondern von diesen Aenderungen unabhängige Summanden enthalten. Die übliche Theorie hilft sich, indem sie diese Summanden als elektrostatische oder magnetische Kräfte den ihrer Angabe nach durch unsere Gleichungen allein bestimmten elektrodynamischen Kräften entgegenstellt. Obwohl wir eine solche Sonderung nicht billigen und daher die übliche Vorstellung über den Causalzusammenhang nicht annehmen können, ist es doch nicht ohne Interesse, zu zeigen, in welcher Weise in den einzelnen Gliedern unserer Gleichungen die von der üblichen Theorie eingeführten Partialkräfte enthalten sind. Zu dem Ende zerlegen wir die Kräfte in der Form  $X = X_1 + X_2$  etc.,  $L = L_1 + L_2$  etc. und setzen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = A(\gamma \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{N}), & L_1 = A(\beta \mathfrak{Z} - \gamma \mathfrak{Y}), \\ Y_1 = A(\alpha \mathfrak{N} - \gamma \mathfrak{Z}), & M_1 = A(\gamma \mathfrak{X} - \alpha \mathfrak{Z}), \\ Z_1 = A(\beta \mathfrak{Z} - \alpha \mathfrak{M}), & N_1 = A(\alpha \mathfrak{Y} - \beta \mathfrak{X}), \end{cases}$$

wodurch wir dann für die  $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$  Gleichungen erhalten, welche aus den für  $X, Y, Z, L, M, N$  bestehenden Gleichungen (1.) und (1<sub>b</sub>) durch Weglassung der zweiten und dritten Glieder der linken Seiten hervorgehen. Nun ist zunächst die Resultante der  $X_1, Y_1, Z_1$  eine elektrische Kraft, welche auftritt, sobald ein Körper sich im magnetischen Felde bewegt. Sie steht senkrecht auf der Richtung der Bewegung und der Richtung der magnetischen Kraftlinien, es ist diejenige Kraft, welche in engerem Sinne als die durch Bewegung inducirte elektromotorische Kraft bezeichnet zu werden pflegt. Wir heben hervor, dass die Absonderung derselben aus der Gesamtkraft nach unseren Anschauungen schon deshalb eine physikalische Bedeutung nicht haben kann, weil dieser Anschauung die Vorstellung widerspricht, als könne das magnetische Feld als solches im Inneren eines Körpers eine relative Bewegung gegen denselben besitzen. Ein Gegenstück der Kraft  $X_1, Y_1, Z_1$  ist die Kraft  $L_1, M_1, N_1$ , welche sich in einem Nichtleiter bemerkbar machen muss, sobald derselbe durch die Kraftlinien eines elektrischen Feldes bewegt wird; dieselbe ist noch durch keine Erfahrung bestätigt und fehlt in der älteren Elektrodynamik.

Wenden wir weiter unsere Aufmerksamkeit der Resultanten der  $L_1, M_1, N_1$  zu und denken uns zu dem Zwecke die allgemeinen Lösungen der für diese Grössen bestehenden Gleichungen dargestellt als Functionen der Grössen

$$u, d\mathfrak{X}/dt, \alpha(d\mathfrak{X}/dx + d\mathfrak{Y}/dy + d\mathfrak{Z}/dz) \text{ etc.}$$

Setzen wir diese letzteren Grössen in den Functionen sämtlich gleich Null, so bleibt ein erster Theil der Kraft übrig, welcher nicht von elektrodynamischen Ursachen herrührt. Seine Componenten besitzen nothwendigerweise ein Potential, er stellt diejenige Fernkraft dar, welche nach der älteren Anschauung von magnetischen Massen ausgeht. Ein zweiter Theil der Kraft wird gegeben durch denjenigen Theil der Functionen, welcher zugleich und nur zugleich mit den  $u, v, w$  verschwindet. Er enthält die magnetische Fernkraft, welche von den eigentlichen elektrischen Strömen auszugehen scheint. Den ganzen elektrodynamischen

Theil der Kraft  $L_2 M_2 N_2$  erhalten wir, wenn wir in dem Ausdruck des zweiten Theiles die Grösse  $4\pi Au$  ersetzen durch die Grösse:

$$4\pi Au + A \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + Aa \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right)$$

und entsprechend mit den  $v, w$  verfahren. Es entspricht dies der Aussage, dass in Hinsicht der Erzeugung einer magnetischen Fernkraft dem eigentlichen Strome gleich zu achten sei erstens die Veränderung einer elektrischen Polarisation, zweitens die convective Bewegung wahrer Elektrizität. Der letzte Theil dieser Aussage findet in dem Rowland'schen Versuche die gewünschte Bestätigung.

Endlich beachten wir die Kraft  $X_3 Y_3 Z_3$ . Es lässt sich zunächst auch aus dieser Kraft ein von den zeitlichen Veränderungen des Systems unabhängiger Theil absondern, welcher ein Potential besitzt und als elektrostatische Fernkraft behandelt wird. Aus der übrig bleibenden elektrodynamischen Kraft lässt sich ein zweiter Theil ablösen, welcher zugleich und nur zugleich mit den Grössen  $d\mathfrak{L}/dt, d\mathfrak{M}/dt, d\mathfrak{N}/dt$  verschwindet. Er stellt offenbar die Inductionskraft dar, welche von veränderlichen magnetischen Momenten herrührt, aber er enthält in versteckter Form auch diejenige elektrische Kraft, welche veränderlichen Strömen ihr Dasein verdankt. Endlich bleibt übrig ein dritter und letzter Theil, welcher als eine durch convectiv bewegten Magnetismus erregte elektrische Kraft gedeutet werden und zur Erklärung gewisser Erscheinungen der unipolaren Induction herangezogen werden muss.

Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass wir zu dem Gleichungssystem (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) auch dadurch hätten gelangen können, dass wir die Wirkung der von den älteren Theorien geforderten Einzelkräfte addirt und eine Reihe hypothetischer Glieder hinzugefügt hätten, welche an der vorhandenen Erfahrung weder bestätigt, noch widerlegt werden können. Der Weg, welchen wir beschritten haben, machte eine geringere Zahl unabhängiger Hypothesen nothwendig. Wir wenden uns nunmehr dazu, aus unseren Gleichungen die wichtigsten allgemeinen Aussagen abzuleiten.

### 3. Bewegung von Magneten und elektrostatisch geladenen Körpern.

Als unabhängige Ursachen für die Veränderung der elektrischen, bez. magnetischen Polarisation erscheinen in unserer Auffassung erstens die magnetischen, bez. elektrischen Kräfte, zweitens die Bewegung der materiellen Körper. Erstere Ursache allein bewirkt nach dem, was wir für ruhende Körper ableiteten, keine Verschiebung der wahren Elektricität in den nichtleitenden Körpern, keine Verschiebung des wahren Magnetismus überhaupt. Letztere Ursache bewirkt für sich allein wohl eine Verschiebung der Elektricität und des Magnetismus gegen den ruhenden Raum, aber sie vermag keine Verschiebung gegen die bewegte Materie zu bewirken, da diese Materie bei der Bewegung die Kraftlinien, als deren freie Enden Elektricität und Magnetismus betrachtet werden können, mit sich fortträgt. Es ist also auch, wenn beide Ursachen zusammenwirken, für den wahren Magnetismus überhaupt, für die wahre Elektricität wenigstens in den Nichtleitern eine relative Bewegung gegen die umgebende Materie ausgeschlossen; Elektricität und Magnetismus bewegen sich unter den genannten Umständen mit der Materie, in welcher sie sich finden, so, als ob sie unzerstörbar und fest an den Theilen derselben haften. Um die gleiche Ueberlegung in Zeichen durchzuführen, differentiiren wir das eine Mal die Gleichungen (1<sub>a</sub>), das andere Mal die Gleichungen (1<sub>b</sub>) beziehentlich nach  $x y z$ , und multipliciren mit dem als ruhend angesehenen Raumelement  $d\tau$ , auf welches sich die  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{M}$  etc. beziehen. Wir verstehen noch unter  $d\tau'$  ein Raumelement, welches zu jeder Zeit die im gegenwärtigen Augenblick in  $d\tau$  enthaltene Materie umschließt, wir nennen  $d\epsilon'$  beziehentlich  $dm'$  die in  $d\tau'$  enthaltene Menge der wahren Elektricität, beziehentlich des wahren Magnetismus und  $\mathfrak{Q}'$ ,  $\mathfrak{M}'$  etc. die auf  $d\tau'$  bezüglichen Werthe der  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{M}$  etc. Wir erhalten so:

$$(3_a) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right. \\ & + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) + \beta \frac{d}{dy} \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \\ & \quad \left. + \gamma \frac{d}{dz} \left( \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} d\tau \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ \left( \frac{d\Omega'}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}'}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}'}{dz} \right) d\tau' \right\} = 4\pi \frac{dm'}{dt} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(3_b) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right. \\ & + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) + \beta \frac{d}{dy} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \\ & \quad \left. + \gamma \frac{d}{dz} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} d\tau \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ \left( \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}'}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}'}{dz} \right) d\tau' \right\} = 4\pi \frac{de'}{dt} \\ & = 4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen enthalten unsere Aussage und ergänzen dieselbe hinsichtlich der Leiter. Sind die Geschwindigkeiten  $\alpha \beta \gamma$  so klein, dass die elektrischen und magnetischen Zustände in jedem Augenblicke statischen Zuständen unendlich nahe bleiben können und beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher quasistatischen Zustände, so ist der gewonnene Lehrsatz hinreichend, aber auch nothwendig, um die Abhängigkeit der ineinander überführbaren Zustände voneinander zu bestimmen. Die Hinzufügung dieses Satzes erlaubt in derartigen Problemen die vollständigen, aber sehr complicirten Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) gleichwerthig zu ersetzen durch die sehr einfachen Gleichungen, welche für statische Probleme in ruhenden Körpern gelten und welche aus den Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) durch Nullsetzen der Geschwindigkeiten und der zeitlichen Aenderungen in allen Punkten des Raumes hervorgehen. Ohne den Begriff der Electricität und des Magnetismus einzuführen, ist eine gleiche Vereinfachung der Aussagen nicht möglich, und hierin vor Allem scheint mir die Unentbehrlichkeit begründet, welche diese Be-

griffe für die Elektrostatik und die Darstellung der Erscheinungen an Magneten gewonnen haben.

#### 4. Induction in geschlossenen Bahnen.

Die grössten Geschwindigkeiten, welche wir den uns umgebenden Körpern ertheilen können, sind noch so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, mit deren reciprokem Werthe multiplicirt die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in den Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) auftreten, dass eigentliche elektrodynamische Wirkungen der Bewegung nur in dem einzigen besonderen Falle der genaueren Untersuchung zugänglich werden, dass diese Wirkungen in der Induction eines elektrischen Stromes in einer geschlossenen metallischen Leitung bestehen. Um die Grösse solcher Wirkungen in geschlossenen Bahnen zu bestimmen, fassen wir ein beliebiges, nicht geschlossenes Flächenstück  $\omega$  ins Auge, welches, im Inneren der betrachteten Materie gelegen, sich mit den bewegten materiellen Theilchen, durch welche es einmal geführt wurde, verschiebt. Die augenblickliche Grenzcurve dieses Flächenstückes heisse  $s$ .  $\zeta'$  bedeute die Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche zu jeder Zeit die Fläche  $\omega$  durchschneiden. Als unabhängig wirkende Ursachen, welche eine Aenderung von  $\zeta'$  herbeiführen, sehen wir wiederum an: erstens die elektrischen Kräfte, zweitens die Bewegung der Materie. Würde erstere Ursache allein wirken, würde also das System ein ruhendes sein, so wäre die mit  $A$  multiplicirte Aenderungsgeschwindigkeit von  $\zeta'$  gleich dem um den ganzen Umfang  $s$  genommenen Integral der elektrischen Kraft, das Integral genommen in einem Sinne, welcher von der Seite der positiven Normale aus gesehen, dem der Drehung des Uhrzeigers entspricht. Die Bewegung allein wirkend aber würde eine Aenderung von  $\zeta'$  nicht zur Folge haben, da sie mit der Fläche  $\omega$  auch die diese Fläche durchsetzenden Kraftlinien fortführte. Es ist also auch in dem wirklichen Falle des Zusammenwirkens beider Ursachen das um die beliebige geschlossene Curve  $s$  in dem angegebenen Sinne genommene Integral der elektrischen Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche eine anfänglich durch die Curve  $s$  begrenzte, der Bewegung folgende, übrigens aber beliebige Fläche  $\omega$  durchsetzen. Der Satz gilt auch in dem besonderen, aber für den Versuch einzig

wichtigen Falle, dass die Curve  $s$  der Bahn eines linearen Leiters folgt und wird nicht ungültig dadurch, dass die Bewegung hinreichend langsam ist, um die entstehenden Zustände beständig als stationäre, den entstehenden Strom als gleichförmig in allen Theilen der Leitung  $s$  erscheinen zu lassen.

Um unsere Ueberlegung in Zeichen zu kleiden, nennen wir  $n', x, n', y, n', z$  die Winkel, welche in jedem Augenblick die Normale des Elementes  $d\omega$  der bewegten Fläche  $\omega$  mit den Axen bildet.  $\mathfrak{L}' \mathfrak{M}' \mathfrak{N}'$  seien die Werthe der  $\mathfrak{L} \mathfrak{M} \mathfrak{N}$  in diesem Elemente. Es seien ferner bezeichnet mit  $d\omega, n, x, n, y, n, z$ , die Werthe der  $d\omega, n', x, n', y, n', z$  in der Anfangslage. Wir beachten, dass wir aus rein geometrischen Gründen haben:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d\omega \cos n', x) &= d\omega \left\{ \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, x - \frac{d\beta}{dx} \cos n, y - \frac{d\gamma}{dx} \cos n, z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega \cos n', y) &= d\omega \left\{ -\frac{da}{dy} \cos n, x + \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, y - \frac{d\gamma}{dy} \cos n, z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega \cos n', z) &= d\omega \left\{ -\frac{da}{dz} \cos n, x - \frac{d\beta}{dz} \cos n, y + \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n, z \right\},\end{aligned}$$

und erhalten also:

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{L}' \cos n', x + \mathfrak{M}' \cos n', y + \mathfrak{N}' \cos n', z) d\omega \\ &= \int \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \alpha \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \beta \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \gamma \frac{d\mathfrak{L}}{dz} \right) \cos n, x d\omega \\ &\quad + \int \left( \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \alpha \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \beta \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \gamma \frac{d\mathfrak{M}}{dz} \right) \cos n, y d\omega \\ &\quad + \int \left( \frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \alpha \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \beta \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \gamma \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \cos n, z d\omega \\ &\quad + \int \mathfrak{L} \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, x d\omega - \int \mathfrak{L} \frac{d\beta}{dx} \cos n, y d\omega - \int \mathfrak{L} \frac{d\gamma}{dx} \cos n, z d\omega \\ &\quad - \int \mathfrak{M} \frac{da}{dy} \cos n, x d\omega + \int \mathfrak{M} \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, y d\omega - \int \mathfrak{M} \frac{d\gamma}{dy} \cos n, z d\omega \\ &\quad - \int \mathfrak{N} \frac{da}{dz} \cos n, x d\omega - \int \mathfrak{N} \frac{d\beta}{dz} \cos n, y d\omega + \int \mathfrak{N} \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n, z d\omega;\end{aligned}$$

demnach unter Zuhilfenahme der Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>):

$$\begin{aligned}A \frac{d\zeta'}{dt} &= \int \left\{ \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n, x + \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n, y + \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n, z \right\} d\omega \\ &= \int (X dx + Y dy + Z dz),\end{aligned}$$

das letzte Integral um den Umfang  $s$  der Fläche  $\omega$  genommen.

In besonderen Fällen vereinfacht sich der gewonnene Satz. Ist es möglich, einen einfach zusammenhängenden Raum abzugrenzen, welcher die bewegte Curve  $s$  vollständig enthält und in welchem sich wahrer Magnetismus nicht findet, so ist es offenbar ohne Einfluss, ob die Hilfsfläche  $\omega$  der Bewegung der materiellen Theile folgt oder eine von derselben unabhängige Verschiebung erleidet, wenn sie nur innerhalb jenes Raumes sich hält und von der Curve  $s$  begrenzt bleibt. In diesem Falle dürfen wir einfacher und darum doch eindeutig aussagen: das Integral der elektrischen Kraft um die geschlossene Curve  $s$  genommen sei gleich der mit  $A$  multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl von magnetischen Kraftlinien, welche von der Curve  $s$  umfasst werden. Halten wir die gemachte Voraussetzung fest und ist obendrein trotz der Bewegung von  $s$  die magnetische Polarisation in jedem festen Punkte des Raumes constant, so dürfen wir sagen, die in der Curve  $s$  inducirte Kraft sei gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der im Raume ruhend gedachten magnetischen Kraftlinien, welche die Curve  $s$  bei ihrer Bewegung in bestimmtem Sinne durchschneidet. Rühren die magnetischen Kräfte, unter deren Einfluss sich die Curve  $s$  bewegt, einzig und allein von dem Einflusse des gleichförmigen Stromes in einer Strombahn  $t$  her, so ist die Zahl der  $s$  durchsetzenden Kraftlinien, wie wir sahen<sup>1)</sup>, gleich dem Product aus dem Neumann'schen Potential der Curven  $s$  und  $t$  aufeinander und der Stromstärke in  $t$ . In diesem Falle giebt also die mit  $A$  multiplicirte Aenderung des genannten Productes auf die Zeiteinheit berechnet die in der Curve  $s$  wirksame elektromotorische Kraft.

In der einen oder anderen Form enthalten diese Sätze alle bekannten sorgfältig untersuchten Fälle der Induction. Auch die Gesetze der unipolaren Induction lassen sich aus der allgemeinen Aussage leicht herleiten. Inductionerscheinungen in dreifach ausgedehnten Körpern sind nur in beschränktem Maasse quantitativ erforscht worden. Die Gleichungen, durch welche Jochmann<sup>2)</sup> und andere den Umfang der gefundenen That-sachen wiedergeben konnten, entstehen unmittelbar aus unseren

<sup>1)</sup> Siehe Seite 246.

<sup>2)</sup> Jochmann, Crelle's Journ. 63. p. 1. 1863.

allgemeinen Gleichungen durch Weglassung einer Reihe von Gliedern, welche infolge der besonderen Natur der behandelten Probleme verschwinden.

Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass wir den allgemeinen Satz der Induction in eine weitere, sehr elegante Form kleiden können, wenn wir uns erlauben, von einer selbstständigen Bewegung der Kraftlinien zu reden und allgemein jede Aenderung der magnetischen Polarisaton als die Folge einer solchen Bewegung der Kraftlinien anzusehen. Wir können alsdann auch allgemeingültig und erschöpfend aussagen: es sei die in einer beliebigen geschlossenen Curve  $s$  inducirte elektrische Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Curve  $s$  in bestimmtem Sinne durchschnitten werden. Indessen, wenn gegen die gelegentliche Benutzung der zu Grunde liegenden Anschauungsweise nichts einzuwenden ist, so thun wir doch besser, sie in der gegenwärtigen Abhandlung zu vermeiden. Denn die von Faraday ebenfalls benutzte, von Poynting<sup>1)</sup> entwickelte Vorstellung, als könnten die Kraftlinien eine relative Bewegung gegen das umgebende Medium besitzen, ist zwar höchst bemerkenswerth und mag durchführbar sein; sie ist aber durchaus verschieden von der hier benutzten Anschauung, derzufolge die Kraftlinien lediglich ein Symbol für besondere Zustände der Materie darstellen. Es hat keinen Sinn, von einer selbstständigen Bewegung solcher Zustände zu reden. Auch ist zu bemerken, dass die controlirbare Ab- und Zunahme der Kraftlinien in allen Theilen des Raumes die unterstellte Bewegung der Kraftlinien noch nicht eindeutig bestimmt. Der eben ausgesprochene Satz würde daher an sich auch nicht in allen Fällen eindeutig die Grösse der Induction liefern, sondern vielmehr als eine Definition zu betrachten sein, durch welche unter den möglichen Bewegungen der Kraftlinien eine bestimmte als die wirkliche bezeichnet wird.

##### 5. Behandlung von Gleitflächen.

An der Grenze zweier heterogenen Körper können die elektrodynamischen Constanten in unstetiger Weise von einem Werthe

<sup>1)</sup> J. H. Poynting, Phil. Trans. 2. p. 277. 1885. [Siehe auch Anmerkung 36 am Schluss des Buches.]

zu einem anderen übergehen, ohne dass gleichzeitig die Geschwindigkeitscomponenten  $\alpha \beta \gamma$  an dieser Grenzfläche unstetige Aenderungen erlitten. Als Unstetigkeitsflächen dieser Art sind zu betrachten die Berührungsflächen zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten oder zwischen Flüssigkeiten untereinander; auch steht es uns frei, von dieser Beschaffenheit den Uebergang an der Grenze der Körper gegen den Aether vorauszusetzen. Das Hinzutreten der stetigen Bewegung giebt an solchen Unstetigkeitsflächen zu neuen Betrachtungen keinen Anlass; die Zustände der materiellen Theile auf beiden Seiten der Fläche sind durch dieselben Relationen mit einander verknüpft, welche auch in ruhenden Körpern Gültigkeit haben.

Anders liegt die Sache für Flächen, an welchen auch die Geschwindigkeitscomponenten unstetigen Aenderungen unterliegen. Da nach einer Bemerkung der Einleitung die Unstetigkeit nur die zur Grenzfläche parallelen Componenten der Geschwindigkeit betreffen kann, so bezeichnen wir Flächen dieser Art passend als Gleitflächen. Sie können sich finden zwischen festen Körpern, welche einander berühren; auch ist es bisweilen bequem und bei unserer Unkenntniss des wahren Verhältnisses alsdann auch erlaubt, die Grenzfläche eines Körpers gegen den Aether als eine Gleitfläche anzusehen. Wie wir ebenfalls schon in der Einleitung bemerkten, behandeln wir eine Gleitfläche als den Grenzfall einer Uebergangsschicht, in welcher die Bewegungen und möglicherweise auch die elektrodynamischen Constanten zwar sehr schnell, aber doch stetig von einem Werth auf einen anderen übergehen. Diese Auffassung verbürgt uns, dass die allgemeinen Sätze, welche wir bisher ableiteten, nicht ungültig werden in einem Systeme, in welchem sich Gleitstellen vorfinden, sie findet ihre Berechtigung darin, dass sie zu Widersprüchen mit der Erfahrung nicht führt. Damit sie hinreichend sei, um die Verhältnisse in der Grenzfläche zu bestimmen, muss die Art des Uebergangs gewissen allgemeinen Beschränkungen unterworfen werden. Wir geben diese Beschränkungen in der Gestalt von Voraussetzungen über die Endlichkeit einer Reihe von Grössen auch in der Uebergangsschicht selbst. Von dem Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Gleitfläche sehen wir ab. Wir verlegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems, auf welches wir uns beziehen, in einen beliebigen Punkt des in

Betracht genommenen Elementes der Uebergangsschicht und lassen ihn diesem Punkte auch bei der Bewegung folgen. Wir geben ferner der  $x$ -Axe eine solche Richtung, dass sie auf dem Elemente der Gleitfläche senkrecht steht und auch bei der Bewegung senkrecht bleibt. Die Uebergangsschicht bildet dann stets die unmittelbare Nachbarschaft der  $xy$ -Ebene. Wir setzen voraus, dass auch in der Uebergangsschicht selbst die Grössen:

$$\begin{array}{cccccc} X & Y & Z & L & M & N \\ \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} & \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ u & v & w & a & \beta & \gamma \end{array}$$

endlich bleiben, ebenso die Differentialquotienten dieser Grössen parallel zur Gleitfläche, also nach  $x$  und  $y$ , ferner die Differentialquotienten der Grössen:

$$\mathfrak{X} \ \mathfrak{Y} \ \mathfrak{Z} \ \mathfrak{L} \ \mathfrak{M} \ \mathfrak{N}$$

nach der Zeit  $t$ . Dagegen dürfen wir nicht ausschliessen, dass die Differentialquotienten nach  $z$  unendlich werden, mit Ausnahme von  $d\gamma/dx$ , welches zufolge der erwähnten Bemerkung der Einleitung endlich bleiben muss.  $\gamma$  selbst ist demnach überall in der Uebergangsschicht verschwindend klein. Dies vorausgesetzt, multipliciren wir die ersten beiden Gleichungen der Systeme (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) mit  $dx$ , integriren nach  $x$  durch die Uebergangsschicht hindurch zwischen zwei derselben äusserst naheliegenden Punkten und beachten, dass bei der Kürze des Integrationsweges das Integral jeder in der Schicht endlich bleibenden Grösse verschwindet. Wir erhalten so, indem wir den Index 1 auf die eine Seite, den Index 2 auf die andere Seite der Grenzfläche beziehen, die vier Gleichungen:

$$(5_a) \quad A \int_1^2 \mathfrak{N} \frac{da}{dz} dz = Y_2 - Y_1, \quad - A \int_1^2 \mathfrak{N} \frac{d\beta}{dz} dz = X_2 - X_1,$$

$$(5_b) \quad - A \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{da}{dz} dz = M_2 - M_1, \quad A \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{d\beta}{dz} dz = L_2 - L_1.$$

Dieselben geben die Verknüpfung der zur Grenzfläche tangentialen Kraftcomponenten auf beiden Seiten derselben miteinander. Die zur Grenzfläche normalen Componenten sind hier wie in ruhenden Körpern verknüpft durch die Bedingung, dass die

Flächendichtigkeit des wahren Magnetismus in der Grenzfläche sich nicht auf andere Weise ändern könne, als durch Convection und die Flächendichtigkeit der wahren Elektrizität nicht auf anderem Wege, als entweder durch Convection oder durch einen eigentlichen Strom.

Ist das betrachtete Element der Grenzschicht von einer Belegung mit wahrer Elektrizität und wahren Magnetismus frei, so sind  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{N}$  im Innern der Uebergangsschicht constant, die Gleichungen (5<sub>a</sub>) und (5<sub>b</sub>) nehmen dann die einfacheren Formen an:

$$(5_a) \quad X_2 - X_1 = A\mathfrak{N}(\beta_1 - \beta_2), \quad Y_2 - Y_1 = A\mathfrak{N}(a_2 - a_1)$$

$$(5_b) \quad L_2 - L_1 = A\mathfrak{J}(\beta_2 - \beta_1), \quad M_2 - M_1 = A\mathfrak{J}(a_1 - a_2).$$

Um ein Beispiel zu geben, in welchem diese Gleichungen zur Anwendung kommen würden, denken wir uns, dass ein fester Rotationskörper um seine Axe sich drehe in einem ihn eng umschliessenden Hohlraum eines anderen festen Körpers. Wird dies System dem Einfluss einer magnetischen Kraftvertheilung unterworfen, welche symmetrisch um die Rotationsaxe ist, so wird nach unserer Auffassung weder im Innern des rotirenden Körpers, noch auch im Innern der ihn umhüllenden Masse ein Anlass zum Auftreten elektrischer Kräfte vorliegen. Solche Kräfte werden in der That ausbleiben, wenn die magnetische Erregung sich ganz auf das Innere des einen oder des anderen Körpers beschränkt. Durchsetzen aber die Kraftlinien die Fläche, in welcher beide Körper an einander gleiten, so werden an dieser Fläche die durch Gleichung (5<sub>a</sub>) gegebenen elektromotorischen Kräfte wachgerufen, welche sich in das Innere der Körper verbreiten und dort die elektrischen Spannungen und Ströme erzeugen, über deren thatsächliches Auftreten unter solchen Verhältnissen uns die Versuche nicht im Zweifel lassen. Sind die betrachteten Körper Nichtleiter und unterwerfen wir sie dem Einfluss elektrischer Kräfte, welche zur Rotationsaxe symmetrisch vertheilt sind und an der Gleitfläche nicht verschwinden, so ruft nunmehr die eingeleitete Bewegung zufolge der Gleichungen (5<sub>b</sub>) in der Nachbarschaft magnetische Kräfte hervor. Derartige Wirkungen sind allerdings noch nicht mit gleicher Sicherheit wie die zuerst erwähnten beobachtet worden, doch liegt wenig-

stens eine Andeutung derselben in den Versuchen des Herrn Röntgen vor.<sup>1)</sup>

In dem allgemeinen Falle, in welchem sich an der Grenzfläche eine Belegung wahrer Elektrizität und wahren Magnetismus findet, genügt die Kenntniss der Flächendichtigkeit derselben allein nicht, um die Integrale der Gleichungen (5<sub>a</sub>) und (5<sub>b</sub>) zu ermitteln; es muss vielmehr weiter bekannt sein, in welchem Maasse in der Uebergangsschicht Elektrizität und Magnetismus an der Bewegung des einen und des anderen der sich berührenden Körper theilnehmen. Diese Unbestimmtheit liegt durchaus in der Natur der Sache. Man denke sich in dem Rowland'schen Versuch über die magnetische Wirkung der convectiv bewegten Elektrizität die elektrisirte Scheibe rotirend anstatt in Luft in einem eng umschliessenden festen Isolator. Die magnetische Wirkung würde offenbar bis zum Verschwinden herabsinken in dem Maasse, in welchem die Elektrizität von der Oberfläche der rotirenden Scheibe auf die berührende Oberfläche des ruhenden Körpers überginge.

#### 6. Erhaltung der Energie. Ponderomotorische Kräfte.

Wir denken uns den Uebergang des Systems aus dem Anfangszustand in den Endzustand während eines jeden Zeitelementes in zwei Stadien zerlegt. Das erste Stadium soll sämtliche materiellen Theile aus der Anfangslage in die Endlage überführen und dabei die Kraftlinien lediglich der Bewegung der materiellen Theile folgen lassen. In dem zweiten Stadium soll die Wirkung der nunmehr vorhandenen elektrischen und magnetischen Kräfte zur Geltung kommen und auch die elektromagnetischen Zustände in die Endlage überführen. Die Aenderung, welche die elektromagnetische Energie des Systems während des ganzen Ueberganges erfährt, ist die Summe der Aenderungen, welche sie in den beiden Stadien erleidet. Die Vorgänge während des zweiten Stadiums sind Vorgänge in ruhenden Körpern; wir wissen bereits, in welcher Weise bei solchen Vorgängen die Aenderungen der elektromagnetischen Energie durch andere Formen der Energie compensirt werden. Während des ersten Stadiums aber ändert sich die elektro-

<sup>1)</sup> W. C. Röntgen, Wied. Ann. 85. p. 264. 1888.

magnetische Energie eines jeden materiellen Theiles des Systems ebenfalls; es bleibt also übrig, Rechenschaft abzulegen über den Verbleib der so verminderten oder den Ursprung der so vermehrten elektromagnetischen Energie. Für den Umfang der vorhandenen Erfahrung lässt sich ohne Unsicherheit die Richtigkeit der Aussage erweisen, dass in jedem vollständigen elektromagnetischen System die in Rede stehende Energie compensirt wird durch die mechanische Arbeit, welche während des betrachteten Zeitelementes von den elektrischen und magnetischen ponderomotorischen Kräften des Systems geleistet wird. Als allgemeingültig angenommen reicht indessen diese Aussage noch nicht hin, um allgemein und mit Strenge die ponderomotorischen Kräfte aus den berechenbaren Aenderungen der elektromagnetischen Energie abzuleiten. Wir fügen deshalb derselben zwei ihr nicht widersprechende Annahmen hinzu, welche nicht durch die Erfahrung, sondern durch unsere besonderen Anschauungen gefordert werden. Die erste Annahme erklärt die angegebene und für jedes vollständige elektromagnetische System erfahrungsmässig zutreffende Aussage auch für jeden beliebigen materiellen Theil eines solchen Systems für gültig. Die zweite Annahme sagt aus, dass ein beliebiger Theil des Systems auf das übrige System keine anderen ponderomotorischen Kräfte ausüben könne, als Druckkräfte, welche an der gemeinsamen Oberfläche von den Elementen des ersten Theils auf die berührenden Elemente des übrigen Theils ausgeübt werden und welche in jedem Punkte der Berührungsfläche lediglich von den elektromagnetischen Zuständen der unmittelbaren Nachbarschaft abhängig sind. Durch die erste Annahme sind eindeutig die von der zweiten Annahme geforderten Druckkräfte bestimmt; wir wollen die Grösse derselben ableiten und zeigen, dass sie hinreichen, um die That-sachen der unmittelbaren Wahrnehmung zu erklären. Dass dann auch in bewegten Körpern dem Princip von der Erhaltung der Kraft Genüge geleistet ist, geht aus der Ableitung der Druckkräfte selber hervor.

Fassen wir während des Zeitelementes  $dt$  die magnetische Energie eines materiellen Theilchens ins Auge, dessen veränderliches Volumen  $d\tau$  genannt werden möge, während  $d\tau$  den Werth von  $d\tau$  im Beginne des Zeitelementes  $dt$  bezeichne. Den Anfangspunkt des benutzten Coordinatensystems legen wir zur

Vereinfachung der Betrachtungen dauernd in einen materiellen Punkt des Raumes  $d\tau$ . Würde sich  $d\tau$  bewegen wie ein starrer Körper, indem es seine Kraftlinien mit sich fortführt, so würde sich sein Energieinhalt nicht ändern. Allgemein muss also die Aenderung dieser Energie lediglich eine Funktion der Verzerrungen sein, welche  $d\tau$  infolge der Bewegung erleidet; unsere Aufgabe ist zunächst, jene Aenderung in dieser Form darzustellen. Es ändern sich nun aber infolge der Verzerrungen nicht allein die Polarisationen, sondern auch die Eigenschaften des materiellen Trägers derselben, also die magnetischen Constanten. Um diese Aenderung in die Rechnung einführen zu können, müssen wir eine Reihe weiterer Bezeichnungen festsetzen. Wir definiren zunächst neben den Constanten  $\mu$  eine Reihe von Constanten  $\mu'$  durch die Bestimmung, dass sein soll:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N \\ &= \mu_{11}L_2 + 2\mu_{12}LM + \text{etc.} \\ &= \mu'_{11}\mathfrak{L}_2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die  $\mu'$  sind also die Coefficienten der  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  in den linearen Functionen dieser Grössen, durch welche die Kräfte dargestellt werden. Wir nennen ferner für den Augenblick  $\xi \eta \zeta$  die Verschiebungen, welche der Punkt, dessen Geschwindigkeiten  $\alpha \beta \gamma$  sind, aus der im Anfang der Zeit  $dt$  innegehabten Lage erleidet. Es sind dann die Grössen:

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \quad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \quad \text{etc.}^1),$$

die Componenten der Verzerrungen des Elementes  $d\tau$ , in welchem die Verschiebungen  $\xi \eta \zeta$  sich finden. Die Constanten  $\mu'$  sind Functionen dieser Grössen, sie hängen ausserdem ab von den Drehungen  $\varrho, \sigma, \tau$ , welche das Element neben der Verzerrung erleidet. Da während des Zeitelementes  $dt$  sowohl die  $x_x, x_y$ , etc., als die  $\varrho, \sigma, \tau$  verschwindend klein bleiben, so ist die Abhängigkeit eine lineare, sie ist uns bekannt, sobald uns die Differentialquotienten der  $\mu'$  nach den  $\varrho, \sigma, \tau, x_x, x_y$ , etc. gegeben werden. Die Differentialquotienten nach den  $\varrho, \sigma, \tau$  sind aus den augenblicklichen Werthen der  $\mu'$  selbst zu berechnen. Für die Differentialquotienten nach den  $x_x, x_y$ , etc. aber ist dies nicht möglich und wir müssen daher annehmen, dass uns anderweitig gegeben werden die Grössen:

<sup>1)</sup> Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik p. 123. 1877.

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}'}{dx_x} &= \mu_{11}',_{11}, & \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} &= \mu_{11}',_{12}, & \text{etc.}, \\ \frac{d\mu_{12}'}{dx_x} &= \mu_{12}',_{11}, & \frac{d\mu_{12}'}{dx_y} &= \mu_{12}',_{12}, & \text{etc.}, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Die so definirten 36 Constanten entsprechen offenbar magnetischen Eigenschaften des besonderen den Raum  $d\tau'$  erfüllenden Stoffes in seinem augenblicklichen Zustande der Deformation; keine dieser Constanten können wir zu unserem Vorhaben entbehren, keine können wir auch aus den bisher behandelten magnetischen Eigenschaften des Stoffes a priori ableiten. Durch geeignete Orientirung des benutzten Coordinatensystems lässt sich die Zahl der geforderten Constanten vermindern; eine Verminderung tritt ebenfalls ein, wenn Symmetrieverhältnisse hinsichtlich des gewählten Coordinatensystemes obwalten. In dem einfachsten Falle, in welchem die Substanz sowohl im Anfangszustande isotrop ist, als auch trotz jeder eintretenden Deformation isotrop bleibt, in einer Flüssigkeit also, sinkt die Zahl der neuen Constanten auf eine einzige herab, welche alsdann zusammen mit der einen Magnetisirungsconstanten die magnetischen Eigenschaften in ausreichender Weise definirt. Es erscheint übrigens nicht unwahrscheinlich, dass auch im allgemeinen Falle nothwendige Beziehungen zwischen den Constanten sich nachweisen lassen, welche dieselben auf eine kleinere Anzahl unabhängiger Constanten zu reduciren gestatten.

Diese Bezeichnungen nun vorausgesetzt, erhalten wir für die in der Zeiteinheit erfolgende Aenderung des magnetischen Energieinhaltes des Raumes  $d\tau'$  nacheinander die folgenden Ausdrücke:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) d\tau' \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ d\tau \frac{d}{dt} (\mu_{11}' \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}' \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) \frac{d}{dt} d\tau' \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} d\tau \left\{ 2 \left( L \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N \frac{d\mathfrak{N}}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{d\mu_{11}'}{dt} \mathfrak{L}^2 + 2 \frac{d\mu_{12}'}{dt} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir entfernen in dem letzten derselben die Differentialquotienten nach  $t$ . Für die Grössen  $d\mathfrak{L}/dt$ ,  $d\mathfrak{M}/dt$ ,  $d\mathfrak{N}/dt$  gehen uns die Gleichungen (1<sub>a</sub>), indem wir in denselben nur den Einfluss der Bewegung berücksichtigen und die Geschwindigkeiten  $a, \beta, \gamma$  in Hinblick auf die besondere Wahl unseres Koordinatensystems gleich Null setzen:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= -\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \mathfrak{M}\frac{da}{dy} + \mathfrak{N}\frac{da}{dz}, \\ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= -\mathfrak{M}\left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{da}{dx}\right) + \mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx}, \\ \frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= -\mathfrak{N}\left(\frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}.\end{aligned}$$

Ferner haben wir für die Grösse  $d\mu_{11}'/dt$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_{11}'}{dt} &= \frac{d\mu_{11}'}{dx_x} \cdot \frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} \cdot \frac{dx_y}{dt} + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d\mu_{11}'}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} + \text{etc.} \\ &= \mu_{11,11} \frac{da}{dx} + \mu_{11,12} \left( \frac{da}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d\mu_{11}'}{d\varrho} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke leiten wir ab für  $d\mu_{12}'/dt$ , etc. Wir setzen alle diese Ausdrücke in die rechte Seite der Gl. (6) ein, es wird alsdann diese Seite eine homogene lineare Function der neun Differentialquotienten der  $a \beta \gamma$  nach den  $xyz$ . Wir können und wollen aber diese Function so ordnen, dass sie uns erscheint als homogene lineare Function der sechs Deformationsgeschwindigkeiten  $da/dx$ ,  $da/dy + d\beta/dx$ , etc. und der drei Rotationsgeschwindigkeiten  $\frac{1}{2}(da/dy - d\beta/dx)$ , etc. Wir beachten dabei, dass die Coefficienten der drei Rotationsgeschwindigkeiten notwendigerweise identisch verschwinden müssen, da eine Bewegung des Theilchens als starren Körpers eine Aenderung seines Energieinhaltes nicht herbeiführt. Dementsprechend werfen wir die mit diesen Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Glieder einfach ab und erhalten nunmehr als Endresultat, indem wir noch durch Division mit  $dt$  auf die Einheit des Volumens reduciren:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N}) d\tau' \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \frac{da}{dx} (\mathfrak{L} - \mathfrak{M} - \mathfrak{N} + \mu_{11}',_{11} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{11} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\beta}{dy} (-\mathfrak{L} + \mathfrak{M} - \mathfrak{N} + \mu_{11}',_{22} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{22} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\gamma}{dz} (-\mathfrak{L} - \mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mu_{11}',_{33} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{33} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 (6.) &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \right) (\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mu_{11}',_{23} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{23} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{da}{dz} \right) (\mathfrak{N} + \mathfrak{L} + \mu_{11}',_{13} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{13} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{da}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) (\mathfrak{M} + \mathfrak{L} + \mu_{11}',_{12} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{12} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.})
 \end{aligned}$$

In der rechts stehenden linearen Function der Verzerrungsgeschwindigkeiten giebt nun offenbar der negativ genommene Coëfficient einer jeden dieser Geschwindigkeiten diejenige Druckcomponente an, mit welcher die magnetisch gestörte Materie die betreffende Verzerrung zu vergrößern strebt. Nennen wir nämlich in üblicher<sup>1)</sup> Bezeichnungweise  $X_x, X_y, X_z$  die Componenten des Druckes, welchen die Materie des Elementes  $d\tau$  auf eine senkrecht zur  $x$ -Axe gelegte Schnittfläche ausübt, und erweitern wir diese Symbolik auch auf die Richtung der andern Axen, so giebt der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 & X_x \frac{da}{dx} + Y_y \frac{d\beta}{dy} + Z_z \frac{d\gamma}{dz} \\
 & + Y_z \left( \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy} \right) + X_z \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{da}{dz} \right) + X_y \left( \frac{da}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

die mechanische Arbeit an, welche der materielle Inhalt des Elementes  $d\tau$  bei eintretender Verzerrung leistet, berechnet auf die Einheit der Zeit und des Volumens. Nach unserer Annahme ist diese mechanische Arbeit der infolge der Verzerrung verlorenen magnetischen Energie gleich. Da dies gilt für jede mögliche Deformation, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Jede der gewonnenen Druckcomponenten ist eine homogene quadratische Function der drei Componenten der herr-

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Mechanik. Elfte Vorlesung.

schenden magnetischen Kraft, mit gleichem Rechte auch der drei Componenten der herrschenden magnetischen Polarisation. Durch vollkommen analoge Betrachtungen lassen sich vollkommen analoge Ausdrücke herleiten für die Druckkräfte, welche infolge der elektrischen Störungen auftreten. Der Gesamtdruck ergibt sich gleich der Summe des magnetischen und des elektrischen.

An die gefundenen Werthe der ponderomotorischen Druckkräfte knüpfen wir drei Bemerkungen. Die erste Bemerkung betrifft die Unterschiede zwischen unserem System der Drucke und dem System, welches Maxwell für den allgemeinen Fall angegeben hat, in welchem Kräfte und Polarisationen verschiedene Richtung haben.<sup>1)</sup> Maxwell's Formen sind zunächst einfacher, da bei ihrer Ableitung auf die mögliche Deformation des Mediums keine Rücksicht genommen ist. Ein Unterschied von weit grösserer Wichtigkeit besteht darin, dass die Druckcomponenten, welche nach der angewandten Symbolik mit  $X_y$  und  $Y_x$  zu bezeichnen sind, bei Maxwell verschiedene Werthe haben, bei uns identisch sind. Nach unserem System wird jedes sich selbst überlassene materielle Theilchen lediglich seine Gestalt verändern, zufolge des Maxwell'schen Systems würde es zugleich als Ganzes eine Rotation annehmen. Die Maxwell'schen Drucke können daher inneren Vorgängen des Elements ihr Dasein nicht verdanken, sie finden also keinen Platz in der hier ausgearbeiteten Theorie. Sie sind allerdings zulässig, wenn man von der Annahme ausgeht, dass im Innern der bewegten Körper der Aether dauernd ruht und den nöthigen Stützpunkt für die eintretende Drehung liefert.

Die zweite Bemerkung betrifft die Vereinfachung, welche unsere Formeln annehmen, wenn wir sie anwenden auf Körper, welche isotrop sind und trotz jeder Deformation isotrop bleiben, also auf Flüssigkeiten. Das System der Constanten  $\mu'$  beschränkt sich hier auf die eine Constante  $\mu' = 1/\mu$ . Bezeichnen wir ferner mit  $\sigma$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so haben wir

<sup>1)</sup> Maxwell, Treat. on Electr. and Magn. 2. p. 254. 1873.

$$\begin{aligned}\mu_{11}',_{11} &= \mu_{22}',_{22} = \mu_{33}',_{33} = -\frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{d \log \sigma} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d \log \sigma}, \\ \mu_{12}',_{11} &= \text{etc.} = 0.\end{aligned}$$

Also werden die Druckkomponenten:

$$(6.) \begin{cases} X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 - N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \end{cases}$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi} L M, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} N L, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} M N.$$

Zu völlig identischen Formen ist im Verfolg eines ähnlichen Gedankenganges für den gleichen Fall bereits von Helmholtz<sup>1)</sup> gelangt, in dessen Formeln die unseren übergehen, wenn wir die Bezeichnungen in der Weise ändern, dass wir  $L, M, N, \mu$  durch  $\lambda/\vartheta, \mu/\vartheta, \nu/\vartheta, 1+4\pi\vartheta$  ersetzen und weiter beachten, dass das  $\vartheta$  der von Helmholtz'schen Formeln gleich  $d\vartheta/d \log \sigma = d\mu/4\pi d \log \sigma$  ist.<sup>2)</sup>

Die dritte Bemerkung betrifft die Frage, inwieweit die Resultanten der aus unsern Hypothesen abgeleiteten Drucke übereinstimmen mit den mechanischen Kräften und Kräftepaaren, welche wir an den elektromagnetisch erregten Körpern tatsächlich beobachten. Wir beachten zunächst, dass sich unsere wirklichen Beobachtungen beschränken auf Systeme, welche dem statischen oder stationären Zustand unendlich nahe sind. Für solche Systeme aber ist das Princip von der Erhaltung der Energie allein schon ausreichend, um aus dem Verlust an elektromagnetischer Energie bei jeder eintretenden Verschiebung eindeutig die Grösse der widerstrebenden mechanischen Kraftkomponente zu berechnen, und es darf als bereits erwiesen angesehen werden, dass die so berechneten Kraftkomponenten mit

<sup>1)</sup> v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 400. 1881.

<sup>2)</sup> Die Vorzeichen bleiben entgegengesetzt, weil bei v. Helmholtz ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.

den beobachteten übereinstimmen. Ein System der Kraftcomponenten, welches dem Princip von der Erhaltung der Kraft genügt, wird nun sicherlich angegeben durch die Resultanten der gefundenen Drucke, es muss also dies eine System eben dasjenige sein, welches auch unmittelbar aus jenem Princip berechnet wird und welches sich im Einklang mit der Erfahrung findet. Um auch *a posteriori* zu dem gleichen Ergebniss zu gelangen, beachten wir, dass unter den Verhältnissen der Wirklichkeit die elektrodynamischen Drucke viel zu schwach sind, um merkliche Deformationen der Volumenelemente fester Körper hervorzurufen. Die äusserst schwachen Verzerrungen, welche sie hier zu Stande bringen, pflegen wir im Gebiet der Elektrizität als Erscheinungen der Elektrostriction von denen der eigentlichen Elektrodynamik zu sondern. Sehen wir also von dieser besonderen Klasse von Erscheinungen hier ab, so ist es für den Erfolg gleichgültig, ob wir in festen Körpern die von uns berechneten Drucke annehmen, oder gar keine Drucke, oder beliebige andere von gleicher Grössenordnung. Wir dürfen uns daher allgemein mit den einfacheren Formen (6.) begnügen, in welchen nunmehr für krystallinische Körper unter  $\mu$  eine beliebige Constante von der Grössenordnung der  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{12}$ , etc. zu verstehen ist. Aber wir dürfen die Formen (6.) sogar weiter vereinfachen, indem wir die mit  $d\mu/d\log\sigma$  behafteten Glieder unberücksichtigt lassen. Denn diese Glieder, welche einen gleichmässigen Druck darstellen, vermögen in tropfbaren Flüssigkeiten bei der geringen Compressibilität derselben keine endlichen Verschiebungen, sondern nur Erscheinungen der Elektrostriction bez. Magnetostriction hervorzurufen, und in gasförmigen Körpern fallen diese Glieder fort, weil die Constante  $\mu$  und entsprechend die Dielektricitätsconstante sich hier nicht merklich mit der Dichtigkeit  $\sigma$  ändert. Diejenigen ponderomotorischen Kräfte, welche endliche Verschiebungen der Körper gegen einander hervorrufen, müssen demnach schon dargestellt sein durch die Resultanten des als überall gültig angenommenen Drucksystems:

$$(6.) \quad \begin{cases} X_x = \frac{\mu}{8\pi} (-L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 - M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 - N^2). \end{cases}$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Dies vereinfachte System der magnetischen Drucke ist nun aber das Maxwell'sche.<sup>1)</sup> Maxwell hat schon gezeigt, dass dasselbe zusammen mit dem entsprechenden elektrischen System die beobachteten ponderomotorischen Kräfte zwischen Magneten, stationären Strömen und elektrisirten Körpern enthält, und wir dürfen uns auf seine einfache Darlegung berufen.

Es scheint übrigens nicht bemerkt worden zu sein, dass dies System von Drucken das Innere eines homogenen Körpers, insbesondere des Aethers, im allgemeinen nur dann in Ruhe lässt, wenn die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, also die herrschenden Zustände statische oder stationäre sind. In dem Falle beliebiger zulässiger elektromagnetischer Erregung müssen die gefundenen Drucke das Innere des von uns als beweglich ausdrücklich vorausgesetzten Aethers in Bewegung setzen mit Geschwindigkeiten, welche wir berechnen könnten, wenn wir für die Masse des Aethers einen Anhalt hätten.<sup>2)</sup> Dies Resultat scheint wenig innere Wahrscheinlichkeit zu besitzen. Um seinerwillen die Theorie zurückzuweisen, liegt indessen vom Standpunkt der gegenwärtigen Arbeit aus kein Grund vor, denn weder steht das Resultat im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen, noch mit der uns zugänglichen Erfahrung. Die geringe Masse der Luft, welche in den bestevacuirten Räumen zurückbleibt, reicht nämlich schon vollständig aus, um alle im Inneren dieser Räume mit vorhandenen Mitteln zu erregenden Strömungen auf einer unmerklichen Grösse zu halten.

<sup>1)</sup> Maxwell, Treat. on Electr. and Magnet. 1873. 2. p. 256. Die Vorzeichen sind dort umgekehrt, weil bei Maxwell ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.

<sup>2)</sup> [Siehe Anmerkung 87 am Schluss des Buches.]

Zum Schluss wünsche ich nochmals hervorzuheben, dass ich der hier vorgetragenen Theorie der elektromagnetischen Kräfte in bewegten Körpern einen Werth nur vom Standpunkt der systematischen Ordnung aus beilege. Die Theorie zeigt, wie wir die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern vollständig behandeln können unter gewissen Beschränkungen, welche wir übrigens willkürlich uns selbst auferlegten. Dass diese Beschränkungen dem Falle der Natur entsprechen, ist wenig wahrscheinlich. Die richtige Theorie dürfte vielmehr eine solche sein, welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet. Die Aufstellung einer dieser Anschauung entsprechenden Theorie aber schien mir zur Zeit mehr und willkürlichere Hypothesen zu erfordern, als die der hier vorgetragenen Theorie.

---

## Nachträgliche Anmerkungen.

(1891.)

1) Zu No. 2. Seite 32.

v. Helmholtz ist es, der zuerst in seiner Abhandlung „Ueber die Erhaltung der Kraft“ im Jahre 1847 die Behauptung aufstellt, dass die Entladung der Leydener Flasche oscillirend sei. Er schliesst dies aus der abwechselnd entgegengesetzt magnetisirenden Wirkung derselben und aus der Erscheinung, dass bei dem Versuch, Wasser durch elektrische Schläge zu zersetzen, sich beide Gasarten an beiden Elektroden entwickeln. Sir William Thomson begründet die gleiche, von ihm selbstständig gefundene Behauptung durch die Theorie und giebt die noch heute gültige Berechnung der mathematischen Verhältnisse derselben im Jahre 1853, Phil. Mag. (4) 5. p. 393. Im Uebrigen seien von der älteren grundlegenden Litteratur genannt die Arbeiten:

für die Flaschenentladung:

Feddersen, Pogg. Ann. 103, p. 69, 1858; 108, p. 497, 1859; 112, p. 452, 1861; 113, p. 437, 1861; 115, p. 336, 1862; 116, p. 132, 1862.

Paalzow, Pogg. Ann. 112, p. 567, 1861; 118, p. 178, 357, 1863.

v. Osttingen, Pogg. Ann. 115, p. 513, 1862; Jubelbd. p. 269, 1874.

G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 121, p. 551, 1864; Ges. Abhandl. p. 168.

L. Lorenz, Wied. Ann. 7, p. 161, 1879.

Für die Oscillationen geöffneter Inductionsapparate:

Helmholtz, Pogg. Ann. 83, p. 505, 1851; Ges. Abh. I, 429.

In dieser Arbeit ist bereits die Theorie implicite enthalten, obwohl explicite nicht auf den besonderen Fall von Oscillationen angewandt.

v. Helmholtz, Ges. Abh. I. p. 531, (1869).

Bernstein, Pogg. Ann. 142, p. 54, 1871.

Schiller, Pogg. Ann. 152, p. 535, 1872.

2) Zu No. 2. Seite 37.

Anfangs isolierte ich sorgfältig mit Siegellack etc. Ich machte aber immer mehr die Erfahrung, dass für alle hier in Betracht kommenden Versuche trockenes Holz eine vollkommen genügende Isolation gewährt. In den späteren Arbeiten ist kein anderes Isolationsmittel mehr angewandt worden.

3) Zu No. 2. Seite 42.

Ich vermüthe, dass die Wirksamkeit des Inductionsapparats zum Theil auch darauf beruht, dass er das Potential unmittelbar vor der Entladung sehr schnell anwachsen lässt. Aus verschiedenen Nebenerscheinungen möchte ich schliessen, dass bei diesem schnellen Anwachsen die Spannung über dasjenige Maass hinausgetrieben wird, bei welchem der Funke schon entsteht, wenn die Spannung langsam wächst, und dass hierdurch die Entladung noch plötzlicher und energischer eintritt, als wenn sich eine statische Ladung entlädt.

4) Zu No. 2. Seite 49.

Man vergleiche mit diesen Curven die verwandten Resonanzcurven, welche Herr V. Bjerknes durch genauere messende Versuche erhalten hat. Wied. Ann. 44, p. 74, 1891.

5) Zu No. 2. Seite 54.

Diese Bemerkung meiner ersten Arbeit zeigt klar, dass ich mir die Schwingungen meines primären Leiters niemals als völlig regelmässige langandauernde Sinusschwingungen vorgestellt habe. Der Werth der Dämpfung ist neuerdings von Herrn V. Bjerknes sehr sorgfältig bestimmt worden. (Wied. Ann. 44. p. 74, p. 513, 1891.) Die Fig. 40 giebt uns eine Vorstellung

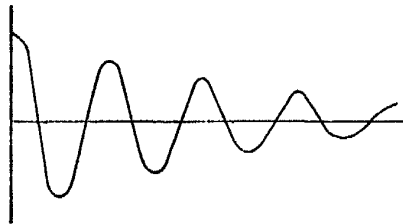


Fig. 40.

von der Schwingung, welche ein unserem primären Leiter ähnlicher Leiter nach den Ergebnissen seiner Versuche ausführte.

6) Zu No. 2. Seite 55.

An dieser Stelle hat sich ein verhängnisvoller Fehler in die Rechnung eingeschlichen, welcher seine störenden Wirkungen noch auf spätere Arbeiten hinauserstreckt.

Die Capacität  $C$  in der Formel  $T = \pi \sqrt{PC}/A$  bedeutet die Menge der Elektrizität, welche sich an dem einen Ende des schwingenden Leiters findet, wenn die Potentialdifferenz der beiden Enden gleich Eins ist. Bestehen nun diese Enden aus zwei weit von einander entfernten Kugeln und ist ihre Potentialdifferenz gleich 1, so ist die Potentialdifferenz einer jeden von ihnen gegen den umgebenden Raum gleich  $\pm 1/2$ , auf jeder von ihnen befindet sich also eine Elektrizitätsmenge, deren Menge in absoluten Einheiten wir erhalten, wenn wir den in Centimetern gemessenen Radius, die Capacität der Kugel, durch 2 dividiren. Wir haben also hier nicht zu setzen  $C = 15$  cm

sondern  $C = \frac{16}{3}$  cm. Die Schwingungsdauer  $T$  ergibt sich jetzt im Verhältniss von  $1 : \sqrt{2}$  kleiner, also jetzt  $T = 1,26$  Hundertmilliontel Secunden.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, hat zuerst Herr H. Poincaré auf diesen Fehler hingewiesen. C. R. 111. p. 322. 1891.

7) Zu No. 2. Seite 57.

Das Resultat dürfte etwa richtig sein, aber die Ableitung ist ohne Worth. Abgesehen davon, dass in der Rechnung der eben erwähnte Fehler zu corrigiren wäre, ist auf die Dämpfung durch Strahlung keine Rücksicht genommen, an welche ich bei Abfassung dieser Abhandlung noch nicht dachte.

8) Zu No. 4. Seite 74.

Unter der Complication, von welcher die Rede ist, und unter der Auslösung langer Funken durch andere sehr viel kürzere waren die folgenden Erscheinungen verstanden. Schaltet man in denselben Kreis die primären Spulen zweier Inductionsapparate und stellt die Funkenstrecke beider so ein, dass sie an der Grenze der Leistungsfähigkeit stehen, so lässt jede Ursache, welche den einen Funken hervorruft, auch den andern zugleich hervortreten; ganz unabhängig von der Wirkung des Lichtes der Funken auf einander, welche ja leicht auszuschliessen ist. Es gehen entweder beide Funken über, oder keiner von beiden. Lässt man ferner eine Töpfer-Holtz'sche Influenzmaschine von 40 cm Scheibendurchmesser schnell laufen, so dass sie im Maximum etwa Funken von 15 cm Länge giebt, und zieht nun die Polkugeln auf 20—25 cm auseinander, bis die Funken vollständig versagen, so erhält man aufs Neue mit Regelmässigkeit einen langen knallenden Funken, so oft man aus dem negativen Conductor einen kleinen Funken zieht, entweder mit dem Knöchel der Hand, oder mit dem Knopf einer Leydener Flasche. Man kann auch den negativen Pol mit einem längeren Leitersystem verbinden, und aus diesem die Funken ziehen, mit gleichem Erfolg. Der auslösende Funke kann ganz kurz und schwach sein; wird er mit dem Knopf einer Leydener Flasche gezogen, so erscheint die Flasche nur wenig geladen. Durch Ziehen der Funken aus dem positiven Pol lässt sich die gleiche Wirkung nicht erzielen. Die Erscheinung muss wohl schon oft beobachtet sein, in der Literatur habe ich sie nicht erwähnt gefunden.

Eine Erklärung dieser Erscheinungen vermag ich nicht zu geben, sie haben offenbar den gleichen Ursprung, wie die Erscheinungen, welche Herr G. Jaumann beschrieben hat in seiner Abhandlung „Einfluss rascher Potentialveränderungen auf den Entladungsvorgang“, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Bd. XCVII. Abth. IIa. Juli 1888. Herr Jaumann führt die Erscheinungen zurück auf den Satz, dass „nicht allein Form, Zustand und Potentialdifferenz des Entladungsfeldes“, sondern auch „die Art der Aenderung der Potentialdifferenz, und zwar wahrscheinlich deren Aenderungsgeschwindigkeit, eine wesentliche Entladungsbedingung sei“. Es ist zu hoffen, dass diese Erscheinungen noch weiter aufgeklärt werden.

9) Zu No. 4. Seite 80.

Die Herren E. Wiedemann und H. Ebert haben bald darauf nachgewiesen, dass es allein der negative Pol und zwar allein die Oberfläche

desselben ist, welche der Wirkung des Lichtes unterliegt. Wied. Ann. 33 p. 241. 1888.

10) Zu No. 4. Seite 83.

Etwas später gelang mir dies dennoch. Ich hatte gehofft, einen Einfluss des Polarisationszustandes des Lichtes auf die Wirkung zu beobachten, einen solchen konnte ich jedoch nicht bemerken.

11) Zu No. 4. Seite 86.

Ich habe hiermit nicht sagen wollen, dass es mir nicht gelungen wäre, die Wirkung des Lichtes auf andere Entladungen als die des Inductoriums zu beobachten, sondern nur, dass es mir nicht gelang, Bedingungen zu finden, bei welchen der so wenig verstandene Vorgang der Funkenentladung durch eine einfachere Wirkung ersetzt war. Dies ist zuerst Herrn Hallwachs gelungen. Wied. Ann. 38. p. 301. 1888. Die einfachste Wirkung, welche ich erzielte, war die, dass ich die Glimmentladung einer Batterie von 1000 kleinen Planté-Accumulatoren zwischen Messingkugeln in freier Luft durch das Licht zum Ueberschlagen brachte, bei einem Abstand der Kugeln, welchen sie ohne Hilfe des Lichtes nicht zu überspringen vermochte.

12) Zu No. 7. Seite 117.

Die 12 m sind gemeint in der Richtung der Grundlinie gemessen, seitlich war die Grundlinie im Allgemeinen auf 3–4 m frei, mit Ausnahme eines eisernen Ofens, der bis auf 1,5 m an dieselbe herantrat. Ich glaubte damals nicht, dass er in dieser Entfernung noch schädlich wirken könnte.

13) Zu No. 7. Seite 117.

Auch in dieser Berechnung ist als Capacität die Capacität einer Endplatte, diese frei im Raume schwebend gedacht, angenommen, welche Capacität auf experimentellem Wege durch Vergleich mit dem der früher benutzten Kugel gefunden war. Es hätte aus dem in Anmerkung 6 dargelegten Grunde nur die Hälfte dieser Capacität benutzt werden dürfen. Daher ist die richtig berechnete Schwingungsdauer im Verhältnisse von  $1:\sqrt{2}$  kleiner als die angegebene. Die richtig berechnete Schwingungsdauer wird also fast genau gleich 1 Hundertmilliontel Secunde.

14) Zu No. 7. Seite 120.

Es ist also hier und daher selbstverständlich auch in allem Folgenden vorausgesetzt, dass um stehende Wellen in Drähten zu erzeugen, man nicht allein den primären und secundären Leiter zur Resonanz bringe, sondern auch den gerade ausgespannten Draht auf beide abstimme. Nur in diesem Falle theilt sich die ganze Länge des Drahtes in deutliche halbe Wellenlängen und nur in diesem Falle gewinnt die Erscheinung ihre volle Entwicklung und Schönheit. Es scheint diese Bedingung einzelnen Beobachtern entgangen zu sein, welche die Versuche mit den Drahtwellen wiederholt haben.

15) Zu No. 7. Seite 121.

Dies hat sich nicht bewahrheitet. In Röhren von etwa 2 cm Durchmesser, welche mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt sind, pflanzen sich die Wellen noch gut fort und zwar mit derselben Geschwindigkeit wie in Drähten.

Herr E. Cohn hat übrigens gezeigt, dass bei einer Schwingungsdauer von der Ordnung der hier benutzten die träge Masse der Elektrolyten noch nicht in's Spiel kommen kann (Wied. Ann. 38. p. 217). Die Durchlässigkeit der Elektrolyten für diese Schwingungen ist zur Bestimmung ihres Widerstandes benutzt worden durch J. J. Thomson (Proc. Roy. Soc. London, 45. p. 209).

16) Zu No. 7. Seite 122.

Die richtig berechnete Schwingungsdauer ist 1 Hundertmilliontel Secunde. Dies ergibt zusammen mit einer Wellenlänge von 2,8 m eine Geschwindigkeit von 280 000 km in der Secunde, also nahezu die Lichtgeschwindigkeit.

Dies ist die Schlussform, welche, allerdings mit weit sorgfältigeren Daten, die Herren E. Lecher (Wied. Ann. 41. p. 850) und Blondlot (C. R. 113. p. 628) benutzt haben, um festzustellen, dass die Geschwindigkeit der Wellen in den Drähten die Lichtgeschwindigkeit sei. In Wahrheit aber zeigt die Schlussform nur, dass Theorie und Beobachtung darin übereinstimmen, dass in einem einfachen geraden Drahte von 2,8 m Länge und in einem Leiter von der Gestalt unseres primären Leiters die Schwingungsdauern gleich gross sind. Aber der absolute Werth der Schwingungsdauer und damit die Geschwindigkeit könnte darum doch in beiden Fällen um den gleichen Betrag abweichen von dem theoretischen Werthe, und er müsste um den gleichen Betrag abweichen, wenn in beiden Leitern dieselbe Ursache der Verzögerung in gleichem Maasse wirkte.

Diese Schlussform kann also nicht angewandt werden, wenn es sich darum handelt, Zweifel an dem Vorhandensein einer solchen Verzögerung zu beseitigen.

Im Text stützt sich die angenommene Geschwindigkeit weit mehr auf die Versuche von Fizeau und Gounelle und Siemens, als auf die Rechnung.

17) Zu No. 7. Seite 127.

Es ist nicht uninteressant, sich zu fragen, wie die Interferenzen hätten ausfallen müssen, wenn aus den Versuchen der Schluss hätte gezogen werden sollen, dass die Geschwindigkeit in den Drähten gleich der Geschwindigkeit in der Luft war. Nach der genauen Theorie, welche in No. 9 dargelegt ist, ergibt sich dies leicht mit Hilfe der Fig. 31, und man erhält etwa folgendes Resultat:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	+	+	0	0	-	-	-	-	-
250	+	0	-	0	0	0	0	0	0
400	-	-	0	0	+	+	+	+	+

Ein Wechsel des Vorzeichens hätte also auch bei gleicher Geschwindigkeit eintreten müssen, aber die folgenden Wechsel, welche die Versuche ergaben, erklären sich nur durch eine verschiedene Geschwindigkeit oder aus

Täuschungen, welche durch die Reflexionen an Unregelmäßigkeiten der Umgebung veranlasst waren.

18) Zu No. 8. Seite 140.

Es ist zu beachten, dass die Bestimmung der Lage der magnetischen Kraft hier nur durch die Theorie ermöglicht ist. Aus den Versuchen lässt sich das Vorhandensein einer zweiten Art der Kraft neben der elektrischen Kraft nicht schliessen. Halten wir uns an die Versuche, so dürfen wir den Ausdruck „magnetische Kraft“ hier nur als eine kürzere Bezeichnung für eine gewisse Vertheilungsform der elektrischen Kraft auffassen. Dass diese magnetische Kraft Wirkungen hervorbringt, welche sich durch die elektrische Kraft nicht erklären lassen, wird erst in der No. 12 durch Versuche erhärtet werden, allerdings nur an den Wellen in Drähten.

19) Zu No. 8. Seite 142.

Die gemessene Wellenlänge beruht also wesentlich auf der Entfernung von  $B$  und  $C$ , also auf der Voraussetzung, dass  $C$  noch ganz genau gemessen sei. Nehmen wir an, dass die Lage von  $C$  schon durch die allgemeinen Verhältnisse des Raumes verschoben sei, so dürfen wir den ersten Knotenpunkt näher an die Wand legen und können bedeutend kleinere Werthe für die Wellenlänge erhalten. Freilich bieten die Versuche selbst gar keinen Anlass zu glauben, dass die Lage von  $C$  schon unsicher sei.

20) Zu No. 8. Seite 145.

Der Lloyd'sche Versuch bildet das optische Analogon zu denjenigen Versuchen, in welchen wir den primären Leiter allmählig von der Wand entfernten. Die Versuche der ersten Art, bei welchen wir den secundären Leiter von einer reflectirenden Wand entfernten, haben inzwischen ebenfalls ihr optisches Analogon gefunden in den schönen Versuchen, welche Herr O. Wiener veröffentlicht hat in der Abhandlung „Stehende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes“. Wied. Ann. 40. p. 203.

Was die akustischen Analogien anlangt, so finde ich, dass die Erscheinung, welche die Analogie zu den Versuchen erster Art bildet, schon vor vielen Jahren durch N. Savart entdeckt worden ist. (Siehe Pogg. Ann. 46. p. 458. 1839, auch eine Anzahl von Abhandlungen Seebeck's in den folgenden Bänden.) Stellt man gegenüber einer ebenen Wand in 15–20 m Entfernung eine gleichmässig tönende Schallquelle auf, und horcht nun die Nähe der Wand ab, am besten mit Hilfe eines Resonators, so findet man den Ton anschwellend in gewissen Punkten, — den Bäuchen —, leise werdend in anderen Punkten — den Knoten. Für die Versuche zweiter Art, bei welchen der primäre Leiter verschoben wurde, ist eine richtige Analogie schon im Text gegeben. Eine andere Analogie bietet der folgende, an sich nicht uninteressante Versuch. Man nehme eine Glasröhre von etwa 60 cm Länge und 2 cm Durchmesser und senke sie langsam über eine nicht allzu gross brennende Bunsenflamme. Bei einer gewissen Tiefe wird die Bunsenflamme gerade eben, aber noch mit Mühe beginnen, das Rohr zum kräftigen Tönen zu bringen. In dieser empfindlichen Lage verbinde man den Brenner und das Rohr fest miteinander. Nähert man nun das System einer festen Wand, so wird in unmittelbarer Nachbarschaft der Wand der Ton erlöschen, er wird

wieder ansprechen in  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge Abstand, und in  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge Abstand wieder erlöschen. Bei sehr empfindlicher Einstellung, welche ich aber nicht jederzeit nach Willkür hervorbringen konnte, habe ich noch zweimaliges weiteres Ansprechen und Wiedererlöschen in je einer halben Wellenlänge Abstand beobachten können. Eine vollständige Erklärung der Erscheinung besitze ich nicht, offenbar hängt sie zusammen mit der anderen Erscheinung, dass eine derartige Röhre verstummt, wenn man einem ihrer Ende einen Resonator nähert, welcher auf den gleichen Ton abgestimmt ist. Dieser letztere Versuch rührt — soviel ich weiss — von Prof. A. Christiani her. (Verhandl. d. phys. Gesellsch. zu Berlin, 15. Dec. 1882, am Schluss der Fortschritte der Physik, Bd. 36.)

21) Zu No. 8. Seite 146.

Diese Bemerkung bezieht sich auf die Versuche in Drähten, welche ich in der Zeit anstellte, als ich diese Arbeit niederschrieb. Es ist schon in der Einleitung bemerkt, dass sich die ausgesprochene Hoffnung nicht verwirklicht hat.

22) Zu No. 9. Seite 151.

Hier ist ein Vorzeichenfehler des Originals corrigirt, auf welchen Herr L. de la Rive mich aufmerksam machte.

23) Zu No. 9. Seite 160.

Diese Rechnung stützt sich auf die beobachtete Wellenlänge von 480 cm. Ist dieselbe unrichtig, so ist die Rechnung entsprechend abzuändern. Wegen des wahren Werthes der Dämpfung siehe Anmerkung 5.

24) Zu No. 10. Seite 172.

Durch die Versuche der folgenden Arbeit wird ziemlich deutlich erwiesen, dass bei schnellen Stromschwankungen die Veränderung von aussen her in den Draht eintritt. Dadurch ist wahrscheinlich gemacht, dass auch beim constanten Strom nicht, wie man bisher annahm, der Vorgang im Drahte die Ursache der Erscheinungen in seiner Nachbarschaft sei, sondern dass umgekehrt die Vorgänge in der Nachbarschaft des Drahtes die Ursachen für die Erscheinungen im Innern desselben abgeben.

Dass die Vorgänge im Drahte mit einem continuirlichen Kreislauf materieller Theilchen oder eines ad hoc angenommenen Fluidums verbunden seien, ist eine Hypothese, welche durch unsere Versuche weder bewiesen, noch ausgeschlossen wird, sondern auf welche sich unsere Versuche gar nicht beziehen. Wir haben weder ein Recht, noch ist es unsere Absicht, diese Hypothese auf Grund der vorliegenden Versuche zu bekämpfen.

25) Zu No. 11. Seite 189.

Zu diesen Erscheinungen rechnet auch die Beobachtung, welche die Herren Hagenbach und Zehnder als Einwand gegen meine Deutung der Versuche anführen (Wied. Ann. 43. p. 611). Ich meine, dass das Licht sich gerade so verhalten wird, wie hier die elektrischen Wellen, man muss nur alle Dimensionen des Versuches sich in entsprechendem Maassstabe reducirt denken, nicht etwa nur die Länge der Wellen.

26) Zu No. 11. Seite 194.

Herr W. König hat zuerst darauf hingewiesen, dass zwischen der Reflexion der elektrischen Wellen von unserem Gitter und der Reflexion einfarbigen Lichtes von der Oberfläche der dichroitischen Krystalle die Analogie eine weit vollständigere ist, als die im Text angezogene Analogie. Herr W. König hat auch aufmerksam gemacht auf den Zusammenhang zwischen der Wirkung unseres Gitters und gewissen polarisirenden Wirkungen optischer Gitter (Wied. Ann. 37. p. 651, am Schluss).

27) Zu No. 11. Seite 195.

Den Herren Oliver Lodge und Howard ist es sogar gelungen, die Brechung und Concentration der elektrischen Strahlen durch grosse Linsen zu erweisen (Phil. Mag. 27. p. 48. 1889).

28) Zu No. 11. Seite 198.

Seither ist es auf mannigfache Weise geglückt, die Versuche auch objectiv darzustellen. Die Benutzung des Froschschenkels glückte Herrn R. Ritter (Wied. Ann. 40. p. 53). Geissler'sche Rohre wandte an Herr Dragounis (Nature 39. p. 546). Herr Boltzmann gab eine sehr bequeme Methode an unter Benutzung des Goldblattelektroskops (Wied. Ann. 40. p. 399). Herr Klementi wandte ein Thermoelement an (Wied. Ann. 42. p. 416). Die deutlichste und schönste, freilich auch eine recht umständliche Methode, ist die mittelst des Bolometers, welche die Herren H. Rubens und R. Ritter zur Darstellung der Versuche und zu weiteren fruchtbringenden Untersuchungen angewandt haben (Wied. Ann. 40. p. 55 und die folg. Bände).

29) Zu No. 13. Seite 211.

Und zwar durch mehr als eine unabhängige Variable. Die „Kraft“ und „Polarisation“ der vorliegenden Arbeit sind nicht in diesem Sinne als zwei Variablen anzusehen, da sie durch eine feste lineare Relation verbunden sind. Lässt man diese Relation fallen, indem man sie als besonderen Fall einer allgemeiner gültigen Beziehung ansieht, so können „Kraft“ und „Polarisation“ als zwei Variablen dienen. Zweckmässiger dürfte es sein, die Polarisation des Aethers als die eine, die Polarisation der ponderablen Materie als zweite Variable einzuführen.

30) Zu No. 13. Seite 227.

Nach jeder üblichen Bezeichnungswiese ist es unzweifelhaft richtig, dass die Menge der auf einer isolirten Kugel angehäuften „Elektricität“ unverändert bleibt, wenn wir die Kugel in eine isolirende Flüssigkeit tauchen, oder allgemeiner gesprochen in beliebiger Weise durch isolirnde Medien hindurch bewegen. Die Grösse also, welche bei solcher Bewegung unverändert bleibt, haben wir als „wahre“ Elektricität bezeichnet. Die Fernwirkung der Kugel und damit die „freie“ Elektricität ändert sich bei der Bewegung.

31) Zu No. 13. Seite 234.

Wenn eine Dampfmaschine mittelst eines hin- und zurücklaufenden Riemens eine Dynamomaschine treibt und diese wiederum mittelst eines hin- und zurücklaufenden Drahtes eine Bogenlampe speist, so ist es allerdings eine allgemein übliche und einwurfsfreie Ausdrucksweise zu sagen, dass die Energie von der Dampfmaschine durch den Riemen auf die Dynamomaschine übertragen werde und von dieser wiederum mittelst des Drahtes auf die

Lampe. Aber hat es einen deutlichen physikalischen Sinn zu behaupten, die Energie bewege sich längs des gespannten Riemens entgegen der Richtung der Bewegung desselben von Punkt zu Punkt fort? Und wenn nicht, kann es dann einen deutlicheren Sinn haben zu sagen, die Energie bewege sich in den Drähten, oder — nach Poynting — in dem Zwischenraum zwischen den beiden Drähten von Punkt zu Punkt fort? Die hier auftretenden begrifflichen Dunkelheiten bedürfen noch sehr der Aufhellung.

32) Zu No. 13. Seite 235.

Um aus den Aenderungen der Energie auf die mechanischen Kräfte zu schliessen, müssen wir den Körpern virtuelle Verschiebungen ertheilen. Wir müssten also die Gleichungen für bewegte Körper und nicht die für ruhende Körper benutzen, welche erstere uns hier noch nicht zur Verfügung stehen. Die hier zu Hülfe genommene Erfahrungsthatfache füllt diese Lücke für statische und stationäre Zustände in genügender Weise aus.

33) Zu No. 14. Seite 259.

Dieser Beweis, dass die aufgestellten Behauptungen die beobachteten Thatfachen enthalten, soll zugleich den Beweis der Behauptungen selbst darstellen. Logisch werden dieselben also hingestellt als Erfahrungsthatfachen nicht als Ergebnisse irgend einer besonderen, sondern als Ergebniss der allgemeinen Erfahrung, welche wir auf diesem Gebiete besitzen.

34) Zu No. 14. Seite 261.

Der Sinn der Gleichungen ist ein äusserst einfacher, ihre äussere Form eine ziemlich verwickelte. Dies liess mich vermuthen, dass es geschickten Mathematikern möglich sein würde, elegantere Formen an die Stelle der hier benutzten zu setzen. Es ist in der That Herrn Vito Volterra gelungen, durch ein einziges System von Gleichungen zugleich die Erscheinungen in ruhenden und in bewegten Körpern darzustellen (*Il nuovo Cimento* (3) 29. p. 53, siehe auch ebenda p. 147).

35) Zu No. 14. Seite 262.

Diese Behauptung ist nicht zutreffend. Allerdings für das Maxwell'sche Werk, an welches ich sie knüpfte, mag sie gelten, aber in der Abhandlung „On Physical Lines of Force“, *Phil. Mag.* April 1861 hat Maxwell selbst die Erscheinungen in bewegten Körpern in vollständig consequenter Weise in sein System eingereiht. Ich hatte dies leider bei Abfassung der Arbeit übersehen.

36) Zu No. 14. Seite 271.

Eine ähnliche Theorie ist neuerdings auch von J. J. Thomson entwickelt worden (*Phil. Mag.* (5) 31. p. 149). Insoweit diese Theorie und diejenige von Poynting zu den Maxwell'schen Gleichungen führen, würde ich dieselben als besondere Formen der „Maxwell'schen Theorie“ betrachten, obwohl die Vorstellungen derselben unzweifelhaft nicht die Maxwell'schen sind.

37) Zu No. 14. Seite 284.

Dieser Umstand bedingt nicht nothwendig einen Fehler der Theorie, aber er bedingt nothwendig eine Unvollständigkeit derselben. Uebrigens scheint die Schwierigkeit tief in den Wurzeln unserer Anschauung begründet, denn sie lässt sich verstehen auch ohne Benutzung der Gleichungen. Denken wir uns eine magnetisirte Stahlkugel im freien Raume rotirend um eine Axe,

welche nicht mit der Richtung der Magnetisirung zusammenfällt, so sendet sie beständig elektromagnetische Wellen aus, gibt also Energie ab, wird also allmählich zur Ruhe kommen. Erzeugen wir das identische System magnetischer Wellen dadurch, dass wir in einer ruhenden Eisenkugel durch wechselnde elektrische Kräfte einen umlaufenden Magnetismus erregen, so sieht man leicht, dass umgekehrt die Eisenkugel im freien Raume beginnen muss zu rotiren. Derartige Folgerungen scheinen wenig wahrscheinlich, allein wir haben kaum ein Recht, in diesem Gebiete auch nur von Wahrscheinlichkeiten zu reden, so vollständig ist unsere Unkenntniss über etwaige Bewegungen des Aethers.

## Namenverzeichniss.

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| Ampère 244. 245.                   | König 293.                        |
| Bernstein 286.                     | Lecher 13. 200. 290.              |
| Beaold, v. 2. 3. 59. 60.           | Lloyd 145. 291.                   |
| Blot 244.                          | Lodge 3. 172. 293.                |
| Bjerknes 18. 287.                  | Lorenz 55. 298.                   |
| Blondlot 13. 290.                  | Maxwell — passim.                 |
| Boltzmann 80. 293.                 | Mosotti 25.                       |
| Bunsen 85. 70. 85.                 | Neumann 53. 240. 249. 252. 270.   |
| Christiani 292.                    | Newton 146.                       |
| Cohn 80. 218. 290.                 | Oberbeck 46.                      |
| Colley 82.                         | Oettingen, v. 286.                |
| Cornu 18.                          | Paulzow 286.                      |
| Coulomb 288.                       | Peltier 283.                      |
| Dracounis 293.                     | Poincaré 9. 18. 30. 288.          |
| Ebert 101. 283.                    | Poisson 25.                       |
| Elster 4.                          | Poynting 149. 171. 284. 271. 294. |
| Engler 110.                        | Ries 71.                          |
| Faraday 7. 21. 103. 131. 146. 271. | Righi 4.                          |
| Feddersen 32. 286.                 | Ritter 199. 293.                  |
| Fitzgerald 3.                      | Rive, de la 13. 14. 17. 18. 292.  |
| Fizeau 9. 122. 290.                | Röntgen 102. 275.                 |
| Fresnel 145. 252. 254.             | Rowland 285. 275.                 |
| Gauss 148. 212. 245.               | Rubens 199. 298.                  |
| Geissler 35. 66.                   | Ruhmkorff 35. 65. 70. 135.        |
| Geitel 4.                          | Savasin 13. 14. 17. 18.           |
| Gounelle 122. 290.                 | Savart 64. 241. 291.              |
| Grove 65.                          | Schiller 286.                     |
| Hagenbach 18. 292.                 | Seebeck 291.                      |
| Hallwachs 101. 289.                | Siemens 9. 122. 290.              |
| Heaviside 171. 209.                | Thomson, J. J. 290. 294.          |
| Helmholtz, v. — passim.            | Thomson, Sir W. 54. 286.          |
| Howard 293.                        | Trouton 13.                       |
| Jaumann 288.                       | Volterra 294.                     |
| Jochmann 270.                      | Weber 56.                         |
| Kirchhoff 54. 277. 280. 286.       | Wiedemann 101. 288.               |
| Klemenčić 293.                     | Wiener 291.                       |
| Kohlrausch 47.                     | Zehnder 18. 292.                  |
| Kolaček 191.                       |                                   |



Auteur	Hertz, Heinrich
Titre	Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft / von Heinrich Hertz
Titre d'ensemble	Gesammelte Werke / von Heinrich Hertz ; 2
Publication	Num. BNF de l'éd. de Leipzig : J. A. Barth, 1894
Description	VIII-295 p.
Notes	Notes bibliogr. Index
Sujet(s)	Éclairage électrique Lumière -- Diffusion
Domaine	Physique
Cote	
Identifiant	N099449