INTENSITAS

VIS MAGNETICAE TERRESTRIS

AD MENSURAM ABSOLUTAM REVOCATA.

COMMENTATIO

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

IN CONSESSU SOCIETATIS MDCCCXXXII. DEC. XV. RECITATA.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VIII.
Gottingae MDCCCXLI.

INTENSITAS

VIS MAGNETICAE TERRESTRIS

AD MENSURAM ABSOLUTAM REVOCATA.

Ad determinationem completam vis magneticae telluris in loco dato tria elementa requiruntur: declinatio seu angulus inter planum in quo agit atque planum meridianum; inclinatio directionis ad planum horizontale; denique tertio loco intensitas. Declinatio, quae respectu omnium applicationum ad usus nauticos atque geodaeticos tamquam elementum primarium consideranda est, statim ab initio observatores atque physicos exercuit, qui etiam inclinationi curas assiduas iam per saeculum dicaverunt. Contra elementum tertium, intensitas, licet aeque dignum scientiae obiectum, usque ad tempora recentiora penitus neglectum mansit. Illustri HUMBOLDT inter tot alias ea quoque laus debetur, quod primus fere huic argumento animum advertit, inque itineribus suis magnam copiam observationum circa intensitatem relativam magnetismi terrestris congessit, e quibus continuum incrementum huius intensitatis, dum ab aequatore magnetico versus polum progredimur, innotuit. Permulti physici, vestigiis huius naturae scrutatoris insistentes, iam tantam determinationum copiam contulerunt. ut clarissimus et de magnetismo terrestri meritissimus vir, HANSTEEN, specimen mappae universalis lineas isodynamicas exhibentis nuper iam edere potuerit.

Methodus, qua in hoc negotio utuntur, consistit in observatione temporis, per quod eadem acus magnetica in locis diversis numerum oscillationum eundem perficit, seu numeri oscillationum in temporis intervallo eodem, intensitasque quadrato numeri oscillationum in tempore dato proportionalis ponitur: hoc modo inter se comparantur intensitates totales, dum acus inclinatoria in centro gravitatis suspensa circa axem horizontalem ad meridianum magneticum normalem oscillat, seu intensitates vis horizontalis, dum acus horizontalis circa axem verticalem vibratur: posterior observandi modus maiorem praecisionem fert, et quae inde resultant, cognitis inclinationibus, facile ad intensitates totales reducuntur.

Manifesto nervus huius methodi pendet a suppositione, distributionem magnetismi liberi in particulis acus ad talem comparationem adhibitae in singulis experimentis invariatam mansisse: si enim vis magnetica acus lapsu temporis aliquantulam debilitationem passa esset, ob id ipsum postea tardius oscillaret, observatorque talis mutationis inscius intensitati magnetismi terrestris pro loco posteriori valorem nimis parvum tribueret. Quodsi experimenta temporis intervallum mediocre complectuntur, acusque ex chalybe bene durato confecta et magnetismo caute imbuta in usum vocatur, considerabilis vigoris debilitatio parum utique metuenda erit; praeterea incertitudo minuetur, si plures acus ad comparationes adhibentur; denique isti suppositioni maior fides accrescet, si peracto itinere acus in loco primo tempus vibrationis non mutasse invenitur. Sed quaecunque cautelae adhibeantur, lenta aliqua debilitatio vis acus vix evitari, adeoque talis consensus post longiorem absentiam raro exspectari poterit; quapropter in comparatione intensitatum pro locis terrae valde dissitis plerumque tantam praecisionem et certitudinem, quantam desiderare debemus, attingere haud licebit.

Ceterum hoc methodi incommodum minus grave est, quamdiu tantum de comparatione intensitatum simultanearum vel temporibus non longe inter se distantibus respondentium agitur. At quum experientia docuerit, tum declinationem tum inclinationem in loco dato mutationes continuas pati, quae post multos annos pergrandes evadant, dubium esse nequit, quin intensitas quoque magnetismi terrestris similibus mutationibus quasi saecularibus obnoxia sit; manifesto autem, quatenus de *hac* quaestione agitur, methodus ista prorsus inefficax evadit. Et tamen, ad scientiae naturalis incrementum summopere desiderandum foret, ut haec ipsa quaestio gravissima in plenissimam lucem promoveatur, quod certo fieri nequit, nisi methodo pure comparativa abrogata alia substituitur, quae a fortuitis acuum inaequalitatibus prorsus independens intensitatem magnetismi terrestris ad unitates stabiles mensurasque absolutas revocat.

Haud difficile est, principia theoretica stabilire, quibus talis methodus, diu iam in votis habita, inniti debet. Multitudo oscillationum, quas acus in tempore dato perficit, pendet tum ab intensitate magnetismi terrestris, tum a constitutione acus, puta a momento statico elementorum magnetismi liberi in illa contentorum, atque ab eius momento inertiae. Quum hoc momentum inertiae absque difficultate assignari possit, patet, observationem oscillationum nobis suppeditare productum ex intensitate magnetismi terrestris in momentum staticum magnetismi acus: sed hae duae quantitates separari nequeunt, nisi observationibus alius generis accitis, quae diversam earum combinationem implicant. Ad hunc finem accedat acus secunda, quae exponatur actioni et magnetismi terrestris et magnetismi acus primae, ut, quam rationem inter se teneant hae duae actiones, explorari possit. Utraque quidem actio pendebit a distributione magnetismi liberi in secunda acu: sed posterior insuper a constitutione acus primae, distantia centrorum, positione rectae centra iungentis respectu axium magneticorum utriusque acus, denique a lege, quam attractiones et repulsiones magneticae sequuntur. Immortalis Tobias Mayer primus iam coniectaverat, hanc legem cum lege gravitationis eatenus convenire, quod illae quoque actiones decrescant in ratione duplicata distantiarum: experimenta clarissimorum virorum Coulomb et Hansteen magnam huic coniecturae plausibilitatem conciliaverunt, experimentaque novissima eam ultra omne dubium evehunt. Sed probe attendendum est, hanc legem referri ad singula elementa magnetismi liberi: effectus totalis corporis magnetismo imbuti longe aliter se habebit, atque in distantiis permagnis, uti ex illa ipsa lege deducere licet, proxime ad rationem inversam triplicatam distantiarum accedet, ita ut actio acus per cubum distantiae multiplicata, distantia ceteris paribus continuo crescente, ad valorem constantem asymptotice convergat, qui, dum distantiae, linea arbitraria pro unitate accepta, per numeros exprimuntur, cum actione vis terrestris homogeneus atque comparabilis erit. Per idoneam experimentorum adornationem et tractationem limes huius rationis eruendus est; qui quum tantummodo momentum staticum magnetismi primae acus involvat, iam habebitur quotiens e divisione huius momenti per intensitatem vis terrestris ortus, qui comparatus cum producto harum quantitatum antea eruto eliminationi istius momenti statici inserviet, atque valorem intensitatis magnetismi terrestris suppeditabit.

Quod attinet ad modum, actiones magnetismi terrestris et acus primae in acum secundam ad experimenta revocandi, duplex via patet, quum acum secundam vel in statu motus vel in statu aequilibrii observare possimus. Prior modus eo redit, ut oscillationes huius acus observentur, dum actio magnetismi terrestris coniungitur cum actione acus primae in distantia idonea ita collocatae, ut ipsius axis sit in meridiano magnetico per centrum acus oscillantis ducto: hoc pacto oscillationes vel accelerabuntur vel retardabuntur, prout poli amici vel inimici sibi mutuo obversi sunt, comparatioque vel temporum vibrationum pro utraque acus primae positione inter se, vel temporis alterutrius cum tempore vibrationum sub sola magnetismi terrestris actione (remota acu prima) locum habentium, rationem huius vis ad actionem primae acus docebit. Alter modus acum primam ita collocat, ut directio vis quam in regione acus secundae libere suspensae exercet, faciat angulum (e. g. rectum) cum meridiano magnetico, quo pacto haec ipsa a meridiano magnetico deflectetur, et e magnitudine deflexus ratio inter vim magneticam terrestrem atque actionem acus primae concludetur.

Ceterum modus prior essentialiter convenit cum eo, quem ill. Poisson iam ante aliquot annos proposuit. Sed experimenta ad ipsius normam a nonnullis physicis tentata, quae quidem mihi innotuerunt, vel successu omnino caruerunt, vel rudem tantummodo approximationem praebuerunt.

Difficultas rei inde potissimum pendet, quod ex actionibus acus in distantiis mediocribus observatis computari debet limes aliquis, qui ad distantiam quasi infinite magnam refertur, et quod eliminationes ad hunc finem necessariae tanto magis a levissimis observationum erroribus turbantur, imo pervertuntur, quo plures incognitae a statu acuum individuali pendentes eliminandae sunt: ad multitudinem perparvam incognitarum autem res tunc tantummodo deduci potest, ubi actiones in distantiis satis magnis (respectu longitudinis acuum) observatae sunt, adeoque ipsae iam perparvae evaserunt. Sed ad actiones tam parvas accurate mensurandas subsidia practica hactenus usitata non sufficiunt.

Ante omnia itaque in id mihi incumbendum esse vidi, ut subsidia nova pararem, per quae tum tempora oscillationum, tum directiones acuum longe maiori praecisione, quam hactenus licuit, observare ac metiri possem. Labores ad hunc finem suscepti et per plures menses continuati, in quibus a praestantissimo Weber multifariam adiutus sum, ad scopum exoptatum ita perduxerunt, ut exspectationem non modo non fefellerint, sed longe superaverint, nec iam quidquam desiderandum restet, ad praecisionem experimentorum subtilitati observationum astronomicarum aequiparandam, nisi locus ab influxu ferri propinqui atque agitationum aëris plene securus. Adsunt duo apparatus simplicitate non minus quam praecisione quam praebent insignes, quorum descriptionem quidem ad aliam occasionem mihi reservare debeo, dum experimenta ad determinandam intensitatem magnetismi terrestris hactenus in observatorio nostro instituta physicis in hac commentatione trado.

1.

Ad explicationem phaenomenorum magneticorum duo fluida magnetica postulamus; alterum cum physicis vocamus boreale, alterum australe. Elementa fluidi alterius attrahere alterius elementa, contra bina elementa eiusdem fluidi mutuo se repellere supponimus, et quidem utramque actionem variari in ratione inversa quadrati distantiae. Veritatem huius legis per ipsas nostras observationes plenissime confirmari infra apparebit.

Fluida ista non per se apparent, sed tantummodo iuncta cum particulis ponderabilibus corporum talium, quae magnetismi capaces sunt, illorumque actiones in eo se manifestant, quod has vel ad motum sollicitant, vel motum, quem aliae vires in ipsas agentes, e. g. gravitas, producerent, impediunt vel mutant.

Actio itaque quantitatis datae fluidi magnetici in quantitatem datam vel eiusdem fluidi vel alterius in distantia data comparabilis erit cum vi motrice data, i. e. cum actione vis acceleratricis datae in massam datam, et quum fluida magnetica ipsa non nisi per effectus quos producunt cognoscere liceat, hi ipsi illorum mensurae inservire debent.

Quo igitur hanc mensuram ad notiones distinctas revocare possimus, ante omnia circa tria quantitatum genera unitates stabilire oportet, puta unitatem distantiarum, unitatem massarum ponderabilium, unitatem virium acceleratricium. Pro tertia accipi potest gravitas in loco observationis: quod si minus arridet, insuper accedere debet unitas temporis, eritque nobis vis acceleratrix ea $= 1$, quae in unitate temporis mutationem velocitatis corporis in ipsius directione moti unitati aequalem gignit.

His ita intellectis, unitas quantitatis fluidi borealis ea erit, cuius vis repulsiva in aliam ipsi aequalem in distantia $= 1$ positam aequivalet vi motrici $= 1$, i. e. actioni vis acceleratricis $= 1$ in massam $= 1$, idemque de unitate quantitatis fluidi australis valebit: in hac determinatione manifesto tum fluidum agens, tum fluidum in quod agitur, in punctis physicis concentrata concipi debent. Insuper autem supponere oportet, attractionem inter quantitates datas fluidorum heteronymorum in distantia data aequalem esse repulsioni inter quantitates resp. aequales fluidorum homonymorum. Actio itaque quantitatis m fluidi magnetici borealis in quantitatem m' eiusdem fluidi in distantia r (dum utrumque in puncto physico concentratum supponitur), exprimitur per $\frac{mm'}{rr}$, sive vi motrici $= \frac{mm'}{rr}$ in directione a priori versus posterius agenti aequivalet, manifestoque haec formula generaliter valet, si, quod semper abhinc subintelligemus, quantitas fluidi australis tamquam negativa spectatur, ubi valor negativus vis $\frac{mm'}{rr}$ pro repulsione attractionem indicabit.

Si itaque in puncto physico aequales quantitates fluidi borealis et australis simul adsunt, nulla omnino actio hinc orietur, si vero inaequales, excessus alterius tantum, quem magnetismum *liberum* (positivum seu negativum) vocabimus, in considerationem veniet.

2.

Hisce suppositionibus fundamentalibus adhuc aliam, quam experientia undique confirmat, adiicere oportet, scilicet, quodvis corpus, in quo fluida magnetica adsint, semper aequalem utriusque quantitatem continere. Quinadeo experientia docet, hancce suppositionem etiam ad singulas talis corporis partes quantumvis parvas, dummodo sensibus nostris discerni possint, extendendam esse. Sed quum per ea, quae in fine art. praec. monuimus, actio eatenus tantum existere possit, quatenus aliqua separatio fluidorum locum habet, necessario hanc per intervalla tam parva fieri supponere debemus, ut mensuris nostris non sint accessibilia.

Corpus itaque magnetismi capax concipi debet tamquam compages innumerarum particularum, quarum quaevis certam quantitatem fluidi magnetici borealis et aequalem australis contineat, ita quidem, ut vel uniformiter inter se mixtae sint (magnetismus lateat), vel separationem minorem maioremve iniverint (magnetismus evolutus sit), quae tamen separatio numquam in transfusionem fluidi ab una particula in aliam abire potest. Nihil refert, utrum separatio maior a maiori quantitate fluidorum quae libera evaserunt, an a maiori intervallo interposito orta supponatur: manifesto autem propter magnitudinem separationis simul eius directio in considerationem venire debet, quae prout in diversis corporis particulis vel conspirat vel refragatur, maior minorve energia totalis respectu punctorum extra corpus oriri poterit.

Quomodocunque autem distributio magnetismi liberi intra corpus se habeat, semper eius loco, per theorema generalius, substituere licet secundum certam legem aliam distributionem in sola corporis superficie, quae respectu virium extrorsum agentium illi exacte aequivaleat, ita ut elementum fluidi magnetici extra corpus ubicunque positum prorsus eandem attractionem vel repulsionem experiatur a distributione magnetismi vera intra corpus atque a fictitia in eius superficie. Eandem fictionem ad *bina* corpora, quae ratione magnetismi liberi in ipsis evoluti in se invicem agunt, extendere licet, ita ut pro utroque distributio fictitia in superficie distributionis verae internae vice fungi possit. Hocce demum modo vulgari loquendi mori, qui e. g. alteri acus magneticae extremitati solum magnetismum borealem, alteri australem tribuit, sensum verum conciliare possumus, quum manifesto haec phrasis cum principio fundamentali supra enunciato, quod alia phaenomena imperiose postulant, non quadret. Sed haec obiter hic annotavisse sufficiat; de theoremate ipso, quum ad institutum praesens non sit necessarium, alia occasione copiosius agemus.

3.

Status magneticus corporis consistit in ratione distributionis magnetismi liberi in singulis eius particulis. Respectu mutabilitatis huius status discrimen essentiale inter corpora diversa magnetismi capacia animadvertimus. In aliis, e. g. in ferro molli, ille status per levissimam vim protinus mutatur, hacque cessante status anterior redit: contra in aliis, praesertim in chalybe durato, vis certam intensitatem attigisse debet, antequam sensibilem status magnetici mutationem producere possit, vique cessante corpus vel in statu quem acquisivit permanet, vel saltem ad priorem non ex asse revenit. In corporibus itaque prioribus moleculae fluidi magnetici semper ad aequilibrium perfectum virium, quae tum inter ipsa mutuo, tum a caussis externis emanant, se componunt, vel saltem a tali aequilibrio sensibiliter vix differunt: contra in corporibus posterioris generis status magneticus etiam absque perfecto aequilibrio inter illas vires durabilis esse potest, si modo vires fortiores extraneae inde arceantur. Etiamsi caussa huius phaenomeni ignota sit, tamen eam ita imaginari licet, ac si partes ponderabiles corporis secundi generis motui fluidorum magneticorum cum ipsis iunctorum aliquod obstaculum frictioni simile opponant, quae resistentia in ferro molli vel nulla est, vel saltem perparva.

In disquisitione theoretica hi duo casus tractationem prorsus diversam requirunt, sed in commentatione praesente de solis corporibus secundi generis sermo erit: in experimentis, de quibus agemus, stabilitas status magnetici in singulis corporibus ad illa adhibitis erit suppositio fundamentalis, probeque proin cavendum est, ne inter experimenta alia corpora, quae hunc statum mutare possent, nimis prope accedant.

Attamen exstat quaedam caussa mutationis, cui etiam corpora secundi generis obnoxia sunt, puta calor. Nimirum experientia docet, statum magneticum corporis variari cum eius temperatura, caloremque auctum intensitatem magnetismi debilitare, ita tamen, ut nisi corpus ultra modum calefactum fuerit, cum priori temperatura prior quoque status magneticus redeat. Haec dependentia per experimenta idonea determinanda est, et si operationes ad idem experimentum pertinentes sub temperaturis inaequalibus institutae sunt, ante omnia ad eandem temperaturam revocandae erunt.

4.

Independenter a viribus magneticis, quas corpora singularia satis sibi vicina in se mutuo exercere videmus, alia vis in fluida magnetica agit, quam quum ubique terrarum se manifestet, ipsi globo terrestri tribuimus, atque magnetismum terrestrem vocamus. Duplici modo haec vis se exserit: corpora secundi generis, in quibus magnetismus evolutus est, si in centro gravitatis sustinentur, ad directionem determinatam sollicitantur: contra in corporibus primi generis fluida magnetica per istam vim sponte separantur, quae separatio, si corpora figurae idoneae eliguntur atque in positione idonea collocantur, persensibilis reddi potest. Utrumque phaenomenon explicatur, vim illam ita concipiendo, ut fluidum magneticum boreale in quovis loco versus certam directionem propellat, australe vero aequali intensitate versus oppositam. Directio prior semper intelligitur, dum de directione magnetismi terrestris loquimur, quae proin per inclinationem ad planum horizontale atque declinationem plani verticalis, in quo agit, a plano meridiano determinatur: illud *planum meridianum magneticum* vocatur. Intensitas autem magnetismi terrestris per vim motricem, quam in unitatem fluidi magnetici liberi exserit, aestimanda est.

Haec vis non modo in diversis terrae locis diversa est, sed etiam in eodem loco variabilis, tum per saecula et annos, tum per anni aestates dieique horas. Respectu directionis haec variabilitas dudum quidem nota fuit: sed respectu intensitatis hactenus tantummodo per horas diei animadverti potuit, quum subsidiis ad longiora temporis intervalla aptis caruissemus. Huic defectui in posterum reductio intensitatis ad mensuram absolutam remedium afferet.

5.

Ut actio magnetismi terrestris in corpora magnetica secundi generis (qualia semper abhinc subintelligenda sunt) calculo subiiciatur, concipiatur tale corpus in partes infinite parvas divisum, sitque $\mathrm{d}m$ elementum magnetismi liberi in particula, cuius coordinatae respectu trium planorum inter se normalium et respectu corporis fixorum denotentur per x, y, z: elementa fluidi australis negative accipi supponimus. Ita primo patet, integrale $\int \mathrm{d}m$ per totum corpus collectum (imo per quamlibet corporis partem mensurabilem) esse $= 0$. Statuamus $\int x\,\mathrm{d}m = X$, $\int y\,\mathrm{d}m = Y$, $\int z\,\mathrm{d}m = Z$, quae quantitates vocari poterunt momenta magnetismi liberi respectu trium planorum fundamentalium, sive respectu axium in ipsa normalium. Quum denotante a quantitatem constantem arbitrariam, fiat $\int (x-a)\,\mathrm{d}m = X$, patet, momentum respectu axis dati pendere tantummodo ab eius directione, non autem ab eius initio. Si per initium coordinatarum axem quartum ducimus, qui cum primariis faciat angulos A, B, C, momentum elementi $\mathrm{d}m$ respectu huius axis erit $= (x\cos A + y\cos B + z\cos C)\,\mathrm{d}m$, adeoque momentum magnetismi liberi in toto corpore

$$= X\cos A + Y\cos B + Z\cos C = V$$

Statuatur

$$\sqrt{(XX+YY+ZZ)} = M, \quad \text{atque} \quad X = M\cos\alpha, \quad Y = M\cos 6, \quad Z = M\cos\gamma$$

ducaturque axis quintus, qui cum tribus primariis faciat angulos α, 6, γ, et cum axi quarto angulum ω; unde quum constet esse

$$\cos\omega = \cos A \cos\alpha + \cos B \cos 6 + \cos C \cos\gamma, \quad \text{fiet} \quad V = M\cos\omega$$

Hunc axem quintum simpliciter vocamus corporis *axem magneticum*, eiusque *directionem* ad valorem positivum radicalis $\sqrt{(XX+YY+ZZ)}$ referri supponimus. Si axis quartus cum hoc axe magnetico coincidit, momentum V fit $= M$, quod manifesto inter omnia est maximum: momentum respectu cuiuslibet alius axis invenitur, multiplicando hoc momentum maximum (quod quoties ambiguitas non metuenda est, simpliciter momentum magnetismi vocari potest) per cosinum anguli inter hunc axem atque axem magneticum. Momentum respectu cuiusvis axis in axem magneticum normalis fit $= 0$, negativum vero respectu cuiusvis axis, qui cum axe magnetico angulum obtusum facit.

Axis itaque magneticus non est recta determinata, quum per punctum quodlibet duci possit, sed tantummodo directio determinata, sive adsunt infinite multi axes magnetici inter se paralleli. E quibus si aliquem ad lubitum eligimus, longitudinemque determinatam ipsi tribuimus, eius termini vocantur poli, alter australis, a quo, alter borealis, versus quem directio axis procedit.

6.

Si in singulas fluidorum magneticorum particulas vis agit intensitate et directione constans, vis totalis in corpus inde resultans facile e principiis staticis derivatur, quum in corporibus, quae hic consideramus, particulae illae fluiditatem quasi amiserint, et cum corpore ponderabili massam unam rigidam sistant. Agat in quamvis moleculam magneticam dm vis motrix $= Pdm$ secundum directionem D (ubi pro moleculis fluidi australis signum negativum iam per se directionem oppositam implicat); sint A, B duo corporis puncta in directione axis magnetici iacentia, eorumque distantia $= r$, positive accepta, dum axis magneticus tendit ab A versus B: ita facile intelligitur, si viribus istis duae novae adiungantur, utraque $= \frac{PM}{r}$, et quarum altera agat in A secundum directionem D, altera in B secundum directionem oppositam, inter omnes has vires aequilibrium fore. Quapropter vires priores aequivalebunt duabus viribus $= \frac{PM}{r}$, quarum altera in B secundum directionem D, altera in A secundum directionem oppositam agit, manifestoque hae duae vires in unam conflari nequeunt.

Si praeter vim P alia similis P' secundum directionem D' in corporis fluida magnetica agit, eius loco iterum duae aliae vel in eadem puncta A, B, vel generalius in puncta alia A', B' agentia substitui possunt, dummodo $A'B'$ quoque sit axis magneticus, et quidem faciendo distantiam $A'B' = r'$, hae vires debent esse $= \frac{P'M}{r'}$, atque in B' agetur secundum directionem D', in A' secundum oppositam, et perinde de pluribus.

Vi magneticae terrestri intra tam parvum spatium, quantum corpus experimentis subiiciendum explet, tuto intensitatem atque directionem ubique constantem (etiamsi respectu temporis variabilem) tribuere, adeoque ea, quae modo diximus, ad eam applicare licet. Sed commodum esse potest, statim ab initio in duas vires eam resolvere, alteram horizontalem $= T$, alteram verticalem, nostris regionibus deorsum tendentem, $= T'$. Quum, si pro posteriori duas alias in puncta A', B' agentia substituere placet, tum punctum A' tum distantiam $A'B' = r'$ pro lubitu assumere liceat, pro A' adoptabimus centrum gravitatis, et denotato pondere corporis, i. e. vi motrice, quam gravitas massae corporis inducit, per p, statuemus $\frac{T'M}{p} = r'$. Hoc pacto effectus vis T' resolvitur in vim $= p$ in A' sursum, atque in aliam aequalem in B' deorsum tendentem, adeoque quum prior manifesto per ipsam gravitatem destruatur, effectus vis magneticae terrestris verticalis simpliciter reducitur ad transpositionem centri gravitatis ex A' in B'. Ceterum manifestum est, pro iis regionibus, ubi vis magnetica terrestris facit angulum acutum cum linea verticali, sive ubi eius pars verticalis fluidum magneticum boreale sursum propellit, similem transpositionem centri gravitatis in axi magnetico versus polum australem locum habere.

Ex hoc rem concipiendi modo sponte elucet, quaecunque experimenta instituantur cum acu magnetica in *unico* statu magnetico, ex his solis inclinationem derivari non posse, sed opus esse ut situs centri gravitatis *veri* aliunde iam innotuerit. Hic situs stabiliri solet, antequam acus magnetismo imbuatur: sed hic modus parum tutus est, quum plerumque acus chalybea iam inter ipsam fabricationem magnetismum utut debilem assumat. Necessarium itaque est pro determinatione inclinationis, ut per mutationem idoneam status magnetici acus, *alia* transpositio centri gravitatis eliciatur, quae quo a priori quam maxime diversa evadat, polos invertere oportebit, quo pacto transpositio duplex obtineri potest. Ceterum transpositio centri gravitatis vel in acubus dimensionum aptissimarum magnetismoque usque ad saturationem imbutis certum limitem transscendere nequit, qui (pro transpositione simplice) in nostris regionibus est circiter 0,4 millimetri, et in regionibus, ubi vis verticalis maxima est, infra 0,6 millimetri manet: unde simul intelligitur, quanta subtilitas mechanica in acubus ad inclinationem determinandam destinatis requiratur.

7.

Si corporis magnetici punctum aliquod C fixum supponitur, ad aequilibrium requiritur et sufficit, ut planum per C, centrum gravitatis atque axem magneticum ductum cum plano meridiano magnetico coincidat, praetereaque momenta, quibus vis magnetica terrestris atque gravitas illud planum circa punctum C vertere nituntur, se destruant: posterior conditio eo redit, ut denotante T partem horizontalem vis magneticae terrestris, i inclinationem axis magnetici ad planum horizontale, esse debeat $TM \sin i$ aequalis producto e pondere corporis in distantiam centri gravitatis transpositi B' a recta verticali per C ducta: manifesto haec distantia esse debet a parte australi vel boreali, prout i est elevatio vel depressio, et pro $i = 0$, B' in ipsa ista recta verticali. Quodsi iam corpus circa hanc verticalem ita motum fuerit, ut axis magneticus pervenerit in planum verticale, cuius azimuthum magneticum, i. e. angulus cum parte boreali meridiani magnetici, (ad lubitum vel versus orientem vel occasum pro positivo acceptum) sit $= u$, magnetismus terrestris exseret vim ad corpus circa axem verticalem vertendum, i. e. ad angulum u minuendum, cuius momentum erit $= TM \cos i \sin u$, corpusque circa hunc axem oscillationes faciet, quarum duratio per methodos notas calculari potest. Scilicet denotando per K momentum inertiae corporis respectu axis oscillationis (i. e. aggregatum molecularum ponderabilium multiplicatarum per quadrata distantiarum ab axe), et pro more per π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$, erit tempus unius oscillationis infinite parvae $= \pi\sqrt{\frac{K}{TM\cos i}}$, siquidem quantitatibus T, M subest unitas virium acceleratricium ea, quae in unitate temporis gignit velocitatem $= 1$: reductio oscillationum finitarum ad infinite parvas simili modo ut pro oscillationibus penduli calculari poterit. Quodsi igitur tempus unius oscillationis infinite parvae ex observationibus erutum est $= t$, habebimus $TM = \frac{\pi\pi K}{tt\cos i}$, adeoque, si quod semper abhinc subintelligimus, corpus ita suspensum est, ut axis magneticus sit horizontalis

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt}$$

Si magis placeret, gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare, illum valorem per $\pi\pi l$ dividere oporteret, denotante l longitudinem penduli simplicis per unitatem temporis vibrantis, ita ut generaliter haberetur $TM = \frac{K}{ttl\cos i}$, vel pro casu nostro $TM = \frac{K}{ttl}$.

8.

Si experimenta huius generis in acubus magneticis instituuntur ad filum verticale suspensis, reactio, quam torsio exserit, in experimentis subtilioribus haud negligenda erit. Distinguamus in tali filo duos diametros horizontales, alterum D in termino inferiori, ubi acus adnexa est, axi magnetico acus parallelum, alterum E in termino superiori, ubi filum fixum est, ipsi D parallelum in statu detorsionis. Supponamus, E facere cum meridiano magnetico angulum v, contra axem magneticum vel D angulum u, eritque experientia duce vis torsionis, proxime saltem, angulo $v-u$ proportionalis: statuemus itaque momentum, quo haec vis angulum u ipsi v aequalem reddere nititur, $= (v-u)\theta$. Iam quum momentum vis magneticae terrestris ad angulum u minuendum sit $= TM\sin u$, conditio aequilibrii continetur in aequatione $(v-u)\theta = TM\sin u$, quae eo plures solutiones reales admittet, quo minor est θ respectu ipsius TM: quatenus autem hic tantummodo de valoribus parvis ipsius u agitur, tuto eius loco hanc adoptare licet $(v-u)\theta = TMu$ sive $\frac{v}{u} = \frac{TM}{\theta} + 1$. In apparatibus nostris terminus fili superior brachio horizontali mobili adnexus est, quod portat indicem in peripheria circuli in gradus divisi incedentem. Etiamsi itaque error collimationis (i. e. divisio cui respondet valor $v = 0$) nondum satis exacte cognitus sit, tamen iste index differentiam binorum valorum ipsius v monstrat: perinde alia apparatus pars differentiam inter valores ipsius u statui aequilibrii respondentes summa praecisione subministrat, patetque, valorem ipsius $\frac{TM}{\theta} + 1$ e divisione differentiae inter duos valores ipsius v per differentiam inter valores respondentes ipsius u obtineri. Quatenus inter experimenta ad hunc finem instituenda temporis intervallum aliquanto longius praeterlabitur, necesse erit, si summa praecisio desideratur, ut variationis diurnae declinationis magneticae ratio habeatur, quod facile fit adiumento observationum simultanearum in secundo apparatu, in quo fili terminus superior intactus conservatur: vix opus est monere, distantiam inter ambos apparatus tantam esse debere, ut sensibiliter se mutuo turbare nequeant.

Ut quantam subtilitatem huiusmodi observationes admittant eluceat, exemplum e diario adscribimus. Observatae sunt 1832 Sept. 22, salvis erroribus collimationis, declinationes u atque anguli v sequentes*):

Exp.	tempus	Acus prima u	Acus prima v	Acus secunda u
I	$9^h\,33'$ matut.	$+0^0\,4'\,19''\,5$	300^0	$+0^0\,2'\,12''\,1$
II	9 57	$-0\;0\;19,6$	240	$+0\;1\;37,7$
III	10 16	$-0\;4\;40,5$	180	$+0\;1\;18,8$

Sunt itaque declinationes acus primae ad statum primae observationis reductae hae

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & u = +0^0\,4'\,19''\,5 & v = 300^0 \\ \text{II} & +0\;0\;14,8 & 240 \\ \text{III} & -0\;3\;47,2 & 180 \end{array}$$

Hinc prodit valor fractionis $\frac{TM}{\theta}$ e combinatione observationum

I et II 881,7
II et III 891,5
I et III 886,6

Variationes declinationis magneticae diurnae per torsionem in ratione unitatis ad $\frac{n}{n+1}$ minuuntur, statuendo $\frac{TM}{\theta} = n$, quae mutatio, si filis tam parvae torsionis, qualem exemplum praecedens exhibet, utimur, pro insensibili haberi potest. Quod vero attinet ad tempus oscillationum (infinite parvarum), e principiis dynamicis facile concluditur, hoc in ratione unitatis ad $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ per torsionem minui. Proprie haec referuntur ad casum eum, ubi $v = 0$: formulae vero generaliter valerent, si statueremus $\frac{TM\cos u^0}{\theta} = n$, denotando per u^0 valorem ipsius u aequilibrio respondentem: sed differentia prorsus insensibilis erit.

9.

Coëfficiens θ principaliter pendet a longitudine, crassitie et materia fili: insuper in filis metallicis aliquantulum a temperatura, in bombycinis a statu hygrometrico: contra in illis (forsanque etiam in his, *dum sunt simplicia*) haud qua-

*) Utraeque divisiones a laeva versus dextram crescunt.

quam a pondere, quo onerantur, pendere videtur. Aliter vero se habet res in filis bombycis compositis, quales ad acus graviores ferendas adhibere oportet: in his θ cum pondere appenso augetur, multo tamen minor manet valore ipsius θ pro filo metallico eiusdem longitudinis eidemque ponderi ferendo apto. Ita e. g. per methodum prorsus similem ei, quam in art. praec. tradidimus (sed in alio filo aliaque acu), inventus est valor ipsius $n = 597{,}4$, dum filum portabat acum cum sola supellectile ordinaria, ubi pondus integrum erat 496,2 grammatum; contra $= 424{,}8$, quum pondus usque ad 710,8 grammata auctum esset, sive erat in casu primo $\theta = 0{,}0016740\, TM$, in casu secundo $\theta = 0{,}0023542\, TM$. Filum, cuius longitudo est 800 millimetrorum, compositum est e 32 filis simplicibus*), quae singula 30 fere grammata tuto portant, atque ita ordinata sunt, ut aequalem tensionem patiantur. Ceterum verisimile est, valorem ipsius θ constare e parte constante et parte ponderi proportionali, atque partem constantem aequalem fieri aggregato valorum ipsius θ pro singulis filis simplicibus. In hac hypothesi (per experimenta hactenus nondum satis confirmata) pars constans pro exemplo allato invenitur $= 0{,}0001012\, TM$, adeoque valor ipsius θ filo simplici respondens $= 0{,}00000316\, TM$. Adiumento valoris ipsius TM mox eruendi ex hac hypothesi colligitur, reactionem fili simplicis per arcum radio aequalem $(57^0\ 18')$ torsi aequivalere gravitati milligrammatis in vectem longitudinis circiter $\frac{1}{17}$ millimetri prementis.

10.

Si corpus oscillans est acus simplex figurae regularis massaeque homogeneae, momentum inertiae K per methodos notas calculari potest. E. g. si corpus est parallelepipedum rectangulum, cuius latera sunt a, b, c, densitas $= d$, et proin massa $q = abcd$, momentum inertiae respectu axis per centrum transeuntis laterique c paralleli erit $= \frac{1}{12}(aa + bb)q$: et quum in acubus magneticis talis formae latus, cui axis magneticus parallelus est, a, longe maior esse soleat latitudine b, pro experimentis crassioribus adeo sufficiet, statuere $K = \frac{1}{12}aaq$. At in experimentis subtilioribus, etiam ubi acus simplex adhibetur, suppositionem gratuitam massae perfecte homogeneae formaeque perfecte regularis aegre admit-

*) Proprie haec fila partialia non sunt vere simplicia, sed tantummodo talia, qualia a mercatoribus non neta venduntur.

teremus. et pro experimentis nostris, ubi non acus simplex, sed acus cum supellectile complicatiore iuncta oscillat, rem per talem calculum expedire omnino impossibile est, adeoque de alio modo, momentum K maxima praecisione determinandi, cogitare oportuit.

Cum acu coniungebatur virga lignea transversalis, a qua pendebant duo pondera aequalia, per cuspides acutissimas in puncta virgae A, B prementia: haec puncta erant in recta horizontali, in eodem plano verticali cum axe suspensionis, et utrimque inde aeque distantia. Denotando massam utriusque ponderis per p, distantiam AB per $2r$, per accessionem huius apparatus momentum K augebitur quantitate $C + 2prr$, ubi C est aggregatum momenti inertiae virgae respectu lineae suspensionis atque momentorum ponderum respectu axium verticalium per cuspides et centra gravitatis transeuntium. Si itaque oscillationes tum acus non oneratae, tum acus in duabus distantiis diversis oneratae, puta pro $r = r'$ atque $r = r''$ observatae, temporaque oscillationum (ad infinite parvas reductarum et ab effectu torsionis purgatarum) resp. $= t, t', t''$ inventa sunt, e combinatione aequationum

$$\begin{aligned} TMtt &= \pi\pi K \\ TMt't' &= \pi\pi(K + C + 2pr'r') \\ TMt''t'' &= \pi\pi(K + C + 2pr''r'') \end{aligned}$$

tres incognitae TM, K et C erui poterunt. Praecisionem adhuc maiorem assequemur, si observatis oscillationibus pro pluribus valoribus ipsius r, puta pro $r = r', r'', r'''$ etc. respondentibus temporibus t', t'', t''' etc., per methodum quadratorum minimorum duas incognitas x, y ita determinamus, ut satisfiat quam proxime aequationibus

$$\begin{aligned} t' &= \sqrt{\frac{r'r'+y}{x}} \\ t'' &= \sqrt{\frac{r''r''+y}{x}} \\ t''' &= \sqrt{\frac{r'''r'''+y}{x}} \text{ etc.} \end{aligned}$$

quo facto habebimus

$$\begin{aligned} TM &= 2\pi\pi px \\ K + C &= 2py \end{aligned}$$

Circa hanc methodum sequentia adhuc monere convenit.

I. Quoties acus non nimis laevigata adhibetur, sufficit, virgam ligneam simpliciter illi imponere. Quoties autem superficies acus perlaevis est, ut frictio impedire nequeat, quominus virga super illa gliscere possit, necesse est, quo totus apparatus ad instar unius corporis rigidi moveatur, virgam apparatui reliquo firmius adstringere. In utroque vero casu prospiciendum est, ut puncta A, B sint satis exacte in recta horizontali.

II. Quum complexus talium experimentorum aliquot horas postulet, variabilitas intensitatis magnetismi terrestris intra hoc temporis spatium, siquidem summa praecisio desideratur, haud negligenda est. Quocirca antequam eliminatio suscipiatur, tempora observata ad valorem constantem ipsius T, e. g. ad valorem medium experimento primo respondentem, reducere oportet. Ad hunc finem observationibus simultaneis in alia acu (perinde ut in art. 8.) opus est, quae si tempus unius oscillationis pro temporibus mediis singulorum experimentorum resp. prodiderunt $= u, u', u'', u'''$ etc., ad calculum loco valorum observatorum t', t'', t''' etc. resp. adhibendi sunt hi

$$\frac{ut'}{u'},\quad \frac{ut''}{u''},\quad \frac{ut'''}{u'''}\quad \text{etc.}$$

III. Simile monitum valet circa variabilitatem ipsius M, a variatione temperaturae, si quae inter experimenta locum habuit, oriundam. Sed patet, reductionem modo adscriptam iam per se hanc correctionem implicare, si utraque acus aequali temperaturae mutationi subiecta fuerit, et perinde a tali mutatione afficiatur.

IV. Quoties tantummodo de valore ipsius TM eruendo agitur, manifesto experimentum primum superfluum est. Attamen utile erit, experimentis acu onerata factis statim adiungere aliud acu non onerata, ut simul valor ipsius K prodeat, qui experimentis alio tempore eadem acu instituendis substrui possit, quum manifesto hic valor invariatus maneat, etiamsi T et M lapsu temporis mutationem subire possint.

11.

Ad maiorem illustrationem huius methodi e magna copia applicationum exemplum unum hic adscribimus. Ecce conspectum numerorum, quos experimenta 1832 Sept. 11 instituta prodiderunt.

Exp.	Oscillationes simultaneae		
	acus primae		acus secundae
	Oneratio	una oscillatio	una oscillatio
I	$r = 180^{mm}$	24″ 63956	17″ 32191
II	$r = 130$	20, 77576	17, 32051
III	$r = 80$	17, 66798	17, 31653
IV	$r = 30$	15, 80310	17, 30529
V	sine oneratione	15, 22990	17, 31107

Tempora observata sunt ad chronometrum, cuius retardatio intra diem temporis medii erat 14″ 24; utrumque pondus p erat 103,2572 grammatum; distantiae r in millimetris microscopica praecisione determinatae; duratio unius oscillationis ad minimum ex 100 oscillationibus (in experimento quinto adeo ex 677 pro acu prima) conclusa reductionem ad infinite parvam iam accepit: ceterum hae reductiones propter perparvam oscillationum amplitudinem *), quam in apparatibus nostris salva summa praecisione adhibere licet, insensibiles sunt. Haec tempora oscillationum reducemus, primo ad valorem medium ipsius TM, qui inter experimentum quintum locum habuit, adiumento praeceptorum art. praec. II.; dein ad valores, qui absque torsione proventuri fuissent, multiplicatione per $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, ubi n in quatuor primis experimentis $= 424{,}8$, in quinto $= 597{,}4$ (conf. art. 9.); denique ad tempus solare medium multiplicatione per $\frac{86400}{86385{,}76}$: hoc pacto nanciscimur

I.	$24''\,65717 = t'$	pro $r' = 180^{mm}$
II.	$20,\,79228 = t''$	pro $r'' = 130^{mm}$
III.	$17,\,68610 = t'''$	pro $r''' = 80^{mm}$
IV.	$15,\,82958 = t''''$	pro $r'''' = 30^{mm}$
V.	$15,\,24515 = t$	pro acu non onerata.

Accipiendo pro unitatibus temporis, distantiae et massae minutum secundum, millimetrum et milligramma, ut sit $p = 103257.2$, e combinatione experimenti primi cum quarto deducimus:

*) E. g. amplitudo oscillationum acus primae in experimento primo fuit initio 0° 37′ 20″, in fine 0° 28′ 34″; in experimento quinto initio 1° 10′ 21″, post 177 oscillationes 0° 45′ 35″, post 677 oscillationes 0° 8′ 14″.

$$TM = 179\,641\,070, \qquad K + C = 4374\,976\,000$$

ac dein ex experimento quinto

$$K = 4230\,282\,000, \quad \text{nec non} \quad C = 144\,694\,000$$

Si vero cuncta experimenta ad calculum revocare placet, methodus quadratorum minimorum commodissime sequenti modo applicatur. Proficiscimur a valoribus approximatis incognitarum x, y e combinatione experimenti primi et quarti prodeuntibus, denotatisque correctionibus adhuc adiiciendis per ξ, η, statuimus

$$\begin{aligned} x &= 88{,}13646 + \xi \\ y &= 21184{,}85 + \eta \end{aligned}$$

Hoc pacto valores calculati temporum t', t'', t''', t'''' prodeunt per methodos obvias

$$\begin{aligned} t' &= 24{,}65717 - 0{,}13988\,\xi + 0{,}00023008\,\eta \\ t'' &= 20{,}78731 - 0{,}11793\,\xi + 0{,}00027291\,\eta \\ t''' &= 17{,}69121 - 0{,}10036\,\xi + 0{,}00032067\,\eta \\ t'''' &= 15{,}82958 - 0{,}08980\,\xi + 0{,}00035838\,\eta \end{aligned}$$

quorum comparatio cum valoribus observatis secundum methodum quadratorum minimorum tractata suppeditat

$$\begin{aligned} \xi &= -\ 0{,}03230, & \eta &= -\ 12{,}38 \\ x &= 88{,}10416, & y &= 21172{,}47 \end{aligned}$$

Hinc denique prodit

$$TM = 179\,575\,250, \quad K + C = 4372\,419\,000$$

ac dein per experimentum primum

$$K = 4228\,732\,400, \qquad C = 143\,686\,600$$

Ecce comparationem temporum e valoribus correctis quantitatum x, y calculatorum cum observatis:

Exper.	Tempus calculatum	Tempus observatum	Differentia
I	24″ 65884	24″ 65717	+0″ 00167
II	20, 78774	20, 79228	−0, 00454
III	17, 69046	17, 68610	+0, 00436
IV	15, 82805	15, 82958	−0, 00153

Longitudinem penduli simplicis Gottingae statuimus $= 994^{mm}126$, unde fit gravitas, per eam unitatem virium acceleratricium, quae calculis praecedentibus subest, mensurata, $= 9811,63$: quodsi itaque gravitatem ipsam pro unitate accipere malumus, fit $TM = 18302,29$: hic numerus exprimit multitudinem milligrammatum, quorum pressio, sub actione gravitatis, in vectem, cuius longitudo est millimetrum, aequivalet vi, qua magnetismus terrestris acum illam circa axem verticalem vertere nititur.

12.

Postquam determinationem producti vis magneticae terrestris horizontalis T in momentum magnetismi acus datae M absolvimus, iam ad alteram disquisitionis partem progredimur, puta ad determinationem quotientis $\frac{M}{T}$. Quam assequemur per comparationem actionis istius acus in aliam acum cum actione magnetismi terrestris in eandem, et quidem, uti iam in introductione expositum est, haec vel in statu motus vel in statu aequilibrii observari poterit: utramque methodum frequenter experti sumus; sed quum posterior pluribus rationibus priori longe praeferenda sit, hocce quidem loco disquisitionem ad illam restringemus. praesertim quum prior prorsus simili modo absque difficultate tractari possit.

13.

Conditiones aequilibrii corporis mobilis, in quod vires quaecunque agunt, per principium motuum virtualium perfacile in formulam unicam contrahuntur, scilicet aggregatum productorum singularum virium per motum infinite parvum puncti, in quod quaelibet agit, in huius directionem proiectum, esse debet tale, ut pro nullo motu virtuali, i. e. cum conditionibus generalibus, quibus motus corporis subiectus est, conciliabili, valorem positivum obtinere possit, adeoque, quatenus motus virtuales in partes oppositas ubique possibiles sunt, ut illud aggregatum, quod per $d\Omega$ denotabimus, fiat $= 0$ pro quolibet motu virtuali.

Corpus mobile, quod hic consideramus, est acus magnetica, cuius punctum G filo torsili superne fixo annexum est. Hoc filum tantummodo impedit, quominus distantia puncti G a termino fili fixo fieri possit maior longitudine fili, ita ut hic quoque, ut in casu corporis perfecte liberi, positio corporis in spatio a sex variabilibus, adeoque eius aequilibrium a sex conditionibus pendeat: sed quum hoc loco problematis solutio tantummodo determinationi quotientis $\frac{M}{T}$ inservire debeat, sufficit consideratio motus virtualis eius, qui in rotatione circa axem verticalem per G transeuntem consistit, manifestoque talem axem tamquam fixum et solum angulum inter planum verticale, in quo est acus axis magneticus, atque planum meridianum magneticum tamquam variabilem considerare licebit. Hunc angulum a parte meridiani boreali versus orientem numerabimus et per u denotabimus.

14.

Concipiamus volumen acus mobilis in elementa infinite parva divisum, sintque x, y, z coordinatae elementi indefiniti, atque e elementum magnetismi liberi in ipso contentum. Initium coordinatarum collocamus in rectae verticalis per G transeuntis puncto arbitrario h intra acum; axes coordinatarum x, y sunto horizontales, ille in meridiano magnetico boream versus, hic versus orientem; coordinatam z sursum numeramus. Ita actio magnetismi terrestris in elementum e producit partem ipsius $\mathrm{d}\Omega$ hancce $Te\,\mathrm{d}x$.

Simili modo dividatur volumen acus secundae fixae in elementa infinite parva, respondeantque elemento indefinito coordinatae X, Y, Z, atque quantitas magnetismi liberi E; denique sit $r = \sqrt{((X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2)}$. Hoc pacto actio elementi E in elementum e sistit partem aggregati $\mathrm{d}\Omega$ hanc $\frac{eE\,\mathrm{d}r}{r^n}$, si potestati r^n distantiae r reciproce proportionalis supponitur.

Denotando per N eum valorem ipsius u, qui detorsioni fili respondet, momentum vis torsionis fili per $\theta(N-u)$ exprimi poterit: haec vis ita concipi potest, ac si in diametri horizontalis fili ad punctum G terminum utrumque ageret vis tangentialis $= \frac{\theta(N-u)}{D}$, denotante D hunc diametrum, unde facile perspicitur, hinc prodire partem aggregati $\mathrm{d}\Omega$ hanc $\theta(N-u)\,\mathrm{d}u$.

Gravitas particularum acus manifesto nihil confert ad aggregatum $\mathrm{d}\Omega$, qum u sit unica variabilis, quapropter habemus

$$\mathrm{d}\Omega = \Sigma\, Te\,\mathrm{d}x + \Sigma \frac{eE\,\mathrm{d}r}{r^n} + \theta(N-u)\,\mathrm{d}u$$

ubi summatio in termino primo refertur ad cuncta elementa e, in secundo ad cunctas combinationes singulorum e cum singulis E. Patet itaque, conditionem aequilibrii stabilis consistere in eo, ut

$$\Omega = \Sigma\, Tex - \Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\theta(N-u)^2$$

fiat maximum.

15.

Ad propositum nostrum convenit, experimenta ita semper adornare, ut axis magneticus utriusque acus sit horizontalis, atque utraque acus in eadem fere altitudine: his itaque suppositionibus calculos ulteriores adstringemus.

Referamus coordinatas punctorum primae acus ad axes in hac fixos in puncto h etiamnum se secantes, et quidem sit axis primus in directione axis magnetici, secundus horizontalis primoque ad dextram, tertius verticalis sursum directus: coordinatae elementi e respectu horum axium sint a, b, c. Perinde sint A, B, C coordinatae elementi E respectu similium axium in acu secunda fixorum et in puncto H huius acus se secantium: hoc punctum prope medium acus atque in eadem altitudine cum puncto h electum supponimus.

Situs puncti H commodissime quidem per distantiam a puncto h atque directionem rectae iungentis determinaretur, si de uno tantum experimento ageretur: sed quum ad institutum nostrum semper plura experimenta requirantur ad diversas puncti H positiones spectantia, quae quidem omnes sunt in eadem recta, attamen haud necessario in recta per punctum h exacte transeunte, praestat, signa statim ab initio ita adornare, ut systema talium experimentorum ab unica variabili pendeat. Referemus itaque punctum H ad punctum arbitrarium h' in eodem plano horizontali ipsi h propinquum, cuius coordinatae sint $\alpha, \beta, 0$, statuemusque distantiam $h'H = R$, angulumque rectae $h'H$ cum meridiano magnetico $= \psi$. Quodsi iam angulum axis magnetici secundae acus cum meridiano magnetico per U denotamus, habebimus

$$\begin{aligned}
x &= a\cos u - b\sin u\\
y &= a\sin u + b\cos u\\
z &= c\\
X &= \alpha + R\cos\psi + A\cos U - B\sin U\\
Y &= \beta + R\sin\psi + A\sin U + B\cos U\\
Z &= C
\end{aligned}$$

Ita omnia ad evolutionem aggregati Ω, atque quotientis $\frac{d\Omega}{du}$, qui pro statu aequilibrii evanescere debet, praeparata sunt.

16.

Primo fit $\Sigma Tex = T\cos u.\Sigma ae - T\sin u.\Sigma be = mT\cos u$, si momentum magnetismi liberi primae acus Σae per m denotamus, quum constet esse $\Sigma be = 0$: pars ipsius $\frac{d\Omega}{du}$ e termino primo ipsius Ω redundans erit $= -mT\sin u$.

Statuendo brevitatis caussa:

$$k = \alpha\cos\psi + \beta\sin\psi + A\cos(\psi - U) + B\sin(\psi - U) - a\cos(\psi - u) - b\sin(\psi - u)$$
$$l = (\alpha\sin\psi - \beta\cos\psi + A\sin(\psi - U) - B\cos(\psi - U) - a\sin(\psi - u) + b\cos(\psi - u))^2 + (C - c)^2$$

erit $rr = (R + k)^2 + l$.

Quum in experimentis utilibus R dimensionibus utriusque acus multo maior esse debeat, quantitas $\frac{1}{r^{n-1}}$ in seriem valde convergentem

$$R^{-(n-1)} - (n-1)kR^{-n} + \left(\frac{nn-n}{2}kk - \frac{n-1}{2}l\right)R^{-(n+1)} - \left(\tfrac{1}{6}(n^3 - n)k^3 - \tfrac{1}{2}(nn-1)kl\right)R^{-(n+2)} + \text{etc.}$$

evolvitur, cuius lex, si operae pretium esset, facile assignaretur. Singuli termini aggregati $\Sigma\frac{eE}{r^{n-1}}$, post substitutionem valorum quantitatum k, l prodeuntes implicabunt factorem talem

$$\Sigma eEa^\lambda b^\mu c^\nu A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$$

qui aequivalet producto e factoribus $\Sigma ea^\lambda b^\mu c^\nu$, $\Sigma EA^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$ a statu magnetico primae et secundae acus resp. pendentibus. Quae hoc respectu generaliter stabilire licet, restringuntur ad aequationes

$$\Sigma e = 0,\ \Sigma ea = m,\ \Sigma eb = 0,\ \Sigma ec = 0,\ \Sigma E = 0,\ \Sigma EA = M,\ \Sigma EB = 0,\ \Sigma EC = 0$$

ubi per M denotamus momentum magnetismi liberi secundae acus. In casu speciali, ubi acus prioris figura magnetismique distributio est symmetrica iuxta longitudinem, puta ut bina semper elementa sibi respondeant, pro quibus a et e habeant valores oppositos, b et c aequales, centro cum puncto h coincidente, semper erit $\Sigma ea^\lambda b^\mu c^\nu = 0$ pro valore pari numeri $\lambda + \mu + \nu$, et similia valent de secunda acu, si figura magnetismique distributio respectu puncti H symmetrica est. Generaliter itaque evanescent in aggregato $\Sigma\frac{eE}{r^{(n-1)}}$ coëfficientes potestatum $R^{-(n-1)}$ et R^{-n}; in casu speciali, ubi utraque acus symmetrica magnetismoque symmetrice imbuta est, simulque centrum prioris, h et h', nec non centrum posterioris et H coincidunt, evanescent etiam coëfficientes potestatum $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$ etc., qui, quoties conditiones illae proxime locum habent, saltem perparvi evadere debent. Terminus principalis, qui ex evolutione partis secundae ipsius Ω, puta huius $-\Sigma\frac{eE}{(n-1)r^{(n-1)}}$, prodit, erit

$$= -\tfrac{1}{2}R^{-(n+1)}(n\Sigma eEkk - \Sigma eEl)$$
$$= mMR^{-(n+1)}(n\cos(\psi-U)\cos(\psi-u) - \sin(\psi-U)\sin(\psi-u))$$

Hinc colligitur, partem ipsius $\frac{d\Omega}{du}$ actioni acus secundae respondentem exprimi per seriem talem

$$fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{etc.}$$

ubi coëfficientes sunt functiones rationales cosinuum et sinuum angulorum ψ, u, U atque quantitatum α, $\mathfrak{G}$, insuperque implicant quantitates constantes a statu magnetico acuum pendentes; et quidem erit

$$f = mM(n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u) + \sin(\psi-U)\cos(\psi-u))$$

Evolutio completa coëfficientium sequentium f', f'' etc. ad institutum nostrum non est necessaria: sufficit observare

1) in casu symmetriae perfectae modo addigitatae coëfficientes f', f''' etc. evanescere.

2) si manentibus quantitatibus reliquis invariatis ψ augeatur duobus rectis (sive quod idem est, si distantia R capiatur in eadem recta retrorsum producta ab altera parte puncti h'), coëfficientes f, f'', f'''' etc. valores suos retinere, contra f', f''', f^{v} etc. valores oppositos nancisci, sive seriem in

$$fR^{-(n+1)} - f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} - \text{etc.}$$

mutari: facile hoc inde concluditur, quod per illam mutationem ipsius ψ, k transit in $-k$, l vero non mutatur.

17.

Conditio itaque, ut acus mobilis per complexum virium non vertatur circa axem verticalem, comprehenditur in aequatione sequente

$$0 = -mT\sin u + fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{etc.} - \theta(u-N)$$

Quum facile effici possit, ut valor ipsius N, si non exacte $= 0$, saltem perparvus sit, atque etiam u pro experimentis, de quibus hic agitur, intra arctos limites maneat, pro termino $\theta(u-N)$ absque erroris sensibilis metu substituere licebit $\theta\sin(u-N)$, eo magis, quod $\frac{\theta}{mT}$ est fractio perparva. Sit u^0 valor ipsius u, aequilibrio acus primae absente secunda respondens, sive

$$mT\sin u^0+\theta\sin(u^0-N)=0$$

unde facile colligitur

$$mT\sin u+\theta\sin(u-N)=(mT\cos u^0+\theta\cos(u^0-N))\sin(u-u^0)$$

ubi loco factoris primi tuto adoptare licet $mT+\theta$. Ita aequatio nostra fit

$$(mT+\theta)\sin(u-u^0)=fR^{-(n+1)}+f'R^{-(n+2)}+f''R^{-(n+3)}+\text{ etc.}$$

Quodsi hic terminum primum $fR^{-(n+1)}$ solum retinemus, solutio in promtu est, scilicet habemus

$$\operatorname{tang}(u-u^0)=\frac{mM(n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0))R^{-(n+1)}}{mT+\theta+mM(n\cos(\psi-U)\cos(\psi-u^0)-\sin(\psi-U)\sin(\psi-u^0))R^{-(n+1)}}$$

ubi in denominatore partem, quae implicat factorem $R^{-(n+1)}$, eodem iure supprimere poterimus, sive statuere

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}(u-u^0)&=\frac{mM}{mT+\theta}(n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0))R^{-(n+1)}\\&=FR^{-(n+1)}\end{aligned}$$

Si vero terminos ulteriores respicere volumus, patet, $\operatorname{tang}(u-u^0)$ in seriem talem evolvi

$$\operatorname{tang}(u-u^0)=FR^{-(n+1)}+F'R^{-(n+2)}+F''R^{-(n+3)}+\text{ etc.}$$

ubi levis attentio docet, coëfficientes F, F', F'' etc. usque ad coëfficientem potestatis $R^{-(2n+1)}$ incl. oriri resp. ex

$$\frac{f}{mT+\theta},\quad\frac{f'}{mT+\theta},\quad\frac{f''}{mT+\theta}\text{ etc.}$$

mutato u in u^0, inde a termino sequente autem partes novae accedent, quibus tamen accuratius persequendis ad institutum nostrum non opus est. Ceterum manifesto $u-u^0$ in seriem similis formae explicabitur, quae adeo usque ad potestatem $R^{-(3n+2)}$ cum serie pro $\operatorname{tang}(u-u^0)$ coincidet.

18.

Patet iam, si acu secunda in diversis punctis eiusdem rectae collocata, ut manentibus ψ et U sola distantia R mutetur, deflexiones acus mobilis a statu aequilibrii, acu secunda absente, puta anguli $u-u^0$ observentur, hinc valores coëfficientium F, F', F'' etc., quotquot adhuc sensibiles sunt, per eliminationem erui posse, quo facto habebimus

$$\frac{M}{T} = \left(1+\frac{\theta}{Tm}\right)\frac{F}{n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0)}$$

ubi valor quantitatis $\frac{\theta}{Tm}$ per methodum, quam in art. 8 docuimus, inveniri poterit. Sed ad praxin magis commodam sequentia observare e re erit.

I. Loco comparationis ipsius u cum u^0 praestat, binas deflexiones oppositas inter se comparare, situ acus secundae inverso, puta, ut manentibus R et ψ angulus U duobus rectis augeatur. Designatis valoribus ipsius u his positionibus respondentibus per u', u'', *exacte* foret $u''=-u'$ pro casu symmetriae perfectae, si simul $u^0=0$; sed superfluum est, has conditiones anxie servare, quum pateat, u' et u'' per series similes determinari, in quibus termini primi *exacte* oppositos valores habeant, adeoque etiam $\frac{1}{2}(u'-u'')$ nec non $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(u'-u'')$ per seriem similem, in qua termini primi coëfficiens sit *exacte* $=F$.

II. Adhuc melius erit, quaterna semper experimenta copulare, etiam angulo ψ duobus rectis mutato, sive distantia R ab altera parte sumta. Si duobus posterioribus experimentis respondent valores ipsius u hi u''', u'''', etiam differentia $\frac{1}{2}(u'''-u'''')$ per similem seriem exprimetur, cuius terminus primus quoque habebit coëfficientem $=F$. Observare convenit (quod e praecedentibus facile colligitur), si n esset numerus impar, coëfficientes F, F'', F'''' etc. in infinitum in utraque serie pro $u'-u^0$, atque $u'''-u^0$ exacte aequales, coëfficientesque F', F''', F^{V} etc. in infinitum exacte oppositos fore, et perinde pro $u''-u^0$ et $u''''-u^0$, ita ut in serie pro $u'-u''+u'''-u''''$ termini alternantes exciderent. Sed in casu naturae, ubi $n=2$, generaliter loquendo ista relatio inter series pro $u'-u^0$ atque $u'''-u^0$ stricte non valet, quum iam pro potestate R^{-6} coëfficientes non exacte oppositi prodeant: attamen ostendi potest, pro hoc quoque termino compensationem completam in combinatione $u'-u''+u'''-u''''$ intercedere, ita ut $\operatorname{tang}\frac{1}{4}(u'-u''+u'''-u'''')$ habeat formam

$$LR^{-3}+L'R^{-5}+L''R^{-7}+\text{ etc.}$$

sive generalius, dum valorem ipsius n tantisper indeterminatum linquimus, hancce

$$LR^{-(n+1)}+L'R^{-(n+3)}+L''R^{-(n+5)}+\text{ etc.}$$

existente $L=F$.

III. Angulos ψ, U ita eligere expediet, ut leves errores in ipsorum mensura commissi valorem ipsius F sensibiliter non mutent. Ad hunc finem valor ipsius U, pro valore *dato* ipsius ψ, ita accipi debet, ut F fiat maximum, puta esse debet

$$\operatorname{cotang}(\psi-U)=n\operatorname{tang}(\psi-u^0)$$

unde fit

$$F=\pm\frac{mM}{mT+\theta}\sqrt{(nn\sin(\psi-u^0)^2+\cos(\psi-u^0)^2)}$$

Angulus vero ψ *ita eligendus est, ut hic valor ipsius* F *fiat vel maximum vel minimum*: illud evenit pro $\psi-u^0=90^0$ vel 270^0, ubi

$$F=\pm\frac{nmT}{mT+\theta}$$

hoc pro $\psi-u^0=0$ vel 180^0, ubi

$$F=\pm\frac{mM}{mT+\theta}$$

19.

Duae itaque methodi praesto sunt ad praxin maxime idoneae, quarum elementa sequens schema exhibet.

Modus primus.

Acus secundae tum centrum tum axis in recta ad meridianum magneticum*) normali.

Deflexio	Situs acus		centrum versus	polus borealis versus
$u=u'$	$\psi=\ \ 90^0$	$U=\ \ 90^0$	orientem	orientem
$u=u''$	$\psi=\ \ 90^0$	$U=270^0$	orientem	occidentem
$u=u'''$	$\psi=270^0$	$U=\ \ 90^0$	occidentem	orientem
$u=u''''$	$\psi=270^0$	$U=270^0$	occidentem	occidentem

*) Accuratius, ad planum verticale, cui respondet valor $u=u^0$, i. e. in quo axis magneticus in aequilibrio est, acu secunda absente. Ceterum in praxi, differentia tum propter parvitatem, tum propter ipsam rationem, a qua in art. praec. III. profecti sumus, tuto semper negligi potest.

Modus secundus.

Acus secundae centrum in meridiano magnetico, axis huic normalis.

Deflexio	Situs acus		centrum versus	polus borealis versus
$u = u'$	$\psi = 0$	$U = 270^0$	boream	occidentem
$u = u''$	$\psi = 0$	$U = 270^0$	boream	orientem
$u = u'''$	$\psi = 180^0$	$U = 90^0$	austrum	occidentem
$u = u''''$	$\psi = 180^0$	$U = 90^0$	austrum	orientem

Statuendo dein $\frac{1}{4}(u'-u''+u'''-u'''') = v$, atque

$$\text{tang } v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \text{ etc.}$$

erit

pro modo priori $\qquad L = \frac{nmM}{mT+\theta}$

pro modo posteriori $\qquad L = \frac{mM}{mT+\theta}$

20.

E theoria eliminationis facile colligitur, calculum, propter inevitabiles observationum errores, eo magis incertum fieri, quo plures coëfficientes per eliminationem determinare oporteat. Hanc ob caussam modus in art. 18, II. praescriptus magni aestimandus est, quod coëfficientes potestatum $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$ supprimit. In casu perfectae symmetriae quidem hi termini iam per se exciderent, sed parum tutum esset, illi fidem habere. Ceterum parvula a symmetria aberratio longe minoris momenti esset in modo primo quam in secundo, et si in illo saltem cavetur, ut punctum h', a quo distantiae numerantur, sit satis exacte in meridiano magnetico per h transeunte, vix differentia sensibilis inter $u'-u''$ atque $u'''-u''''$ se manifestabit. Sed hoc secus se habet in modo secundo, praesertim si apparatus suspensionem excentricam postulat. Per hunc modum, quoties spatium non permittit observationes ab utraque parte, semper praecisionem multo minorem assequeris. Praeterea modus primus eo quoque nomine praeferendus est, quod, quum in casu naturae sit $n = 2$, duplo maiorem valorem ipsius L producit, quam secundus. Ceterum si in modo secundo terminum a $R^{-(n+2)}$ pendentem, in casu suspensionis excentricae, quantum licet exterminare studemus, punctum h' ita eligendum est, ut centrum acus (pro $u = u^0$) sit medium inter h et h': calculum tamen, qui hoc docuit, brevitatis caussa hic supprimere oportet.

21.

In calculis praecedentibus exponentem n indeterminatum liquimus: diebus Iunii 24—28. 1832 duas series experimentorum exsequuti sumus, ad tantas distantias, quantas spatium permisit, extensas, per quas, quemnam valorem natura postulet, evidentissime apparebit. In prima serie acus secunda (ad modum primum art. 19) in recta ad meridianum magneticum normali, in secunda centrum acus in ipso meridiano collocabatur. Ecce conspectum summae horum experimentorum, ubi distantiae R in partibus metri expressae, valoresque anguli $\frac{1}{4}(u - u' + u'' - u''')$ pro prima serie per v, pro secunda per v' denotati sunt.

R	v	v'
1^m 1		1^0 57′ 24″ 8
1, 2		1 29 40, 5
1, 3	2^0 13′ 51″ 2	1 10 19, 3
1, 4	1 47 28, 6	0 55 58, 9
1, 5	1 27 19, 1	0 45 14, 3
1, 6	1 12 7, 6	0 37 12, 2
1, 7	1 0 9, 9	0 30 57, 9
1, 8	0 50 52, 5	0 25 59, 5
1, 9	0 43 21, 8	0 22 9, 2
2, 0	0 37 16, 2	0 19 1, 6
2, 1	0 32 4, 6	0 16 24, 7
2, 5	0 18 51, 9	0 9 36, 1
3, 0	0 11 0, 7	0 5 33, 7
3, 5	0 6 56, 9	0 3 28, 9
4, 0	0 4 35, 9	0 2 22, 2

Hi numeri vel obiter inspecti monstrant, pro valoribus maioribus tum numeros secundae columnae proxime duplo maiores esse numeris tertiae, tum numeros utriusque columnae proxime in ratione inversa cubi distantiarum: ita ut de veritate valoris $n = 2$ nullum dubium remanere possit. Quo magis adhuc haec lex in singulis experimentis confirmaretur, omnes numeros per methodum quadratorum minimorum tractavimus, unde valores coëfficientium sequentes prodierunt:

$$\text{tang}\, v = 0{,}086870\, R^{-3} - 0{,}002185\, R^{-5}$$
$$\text{tang}\, v' = 0{,}043435\, R^{-3} + 0{,}002449\, R^{-5}$$

Ecce conspectum comparationis valorum per has formulas computatorum cum observatis:

Valores computati.

R	v	differentia	v'	differentia
1^m 1			1° 57′ 22″ 0	+2″ 8
1, 2			1 29 46, 5	—6, 0
1, 3	2° 13′ 50″ 4	+ 0″ 8	1 10 13, 3	+6, 0
1, 4	1 47 24, 1	+ 4, 5	0 55 58, 7	+0, 2
1, 5	1 27 28, 7	— 9, 6	0 45 20, 9	—6, 6
1, 6	1 12 10, 9	— 3, 3	0 37 15, 4	—3, 2
1, 7	1 0 14, 9	— 5, 0	0 30 59, 1	—1, 2
1, 8	0 50 48, 3	+ 4, 2	0 26 2, 9	—3, 4
1, 9	0 43 14, 0	+ 7, 8	0 22 6, 6	+2, 6
2, 0	0 37 5, 6	+10, 6	0 18 55, 7	+5, 9
2, 1	0 32 3, 7	+ 0, 9	0 16 19, 8	+4, 9
2, 5	0 19 2, 1	—10, 2	0 9 38, 6	—2, 5
3, 0	0 11 1, 8	— 1, 1	0 5 33, 9	—0, 2
3, 5	0 6 57, 1	— 0, 2	0 3 29, 8	—1, 0
4, 0	0 4 39. 6	— 3, 7	0 2 20, 5	+1, 7

22.

Experimenta praecedentia eum potissimum in finem suscepta fuerunt, ut lex actionis magneticae ultra omne dubium eveheretur, porro, ut quot terminos seriei respicere conveniat, quantamque praecisionem ferant experimenta, appareret. Docuerunt, si ad distantias minores quadruplo longitudinis acuum non descendamus, duos seriei terminos sufficere *). Ceterum differentiae, quas calculus prodidit, neutiquam pure pro erroribus observationum haberi debent: plures enim cautelae, a quarum usu harmoniam adhuc maiorem sperare licet, tunc temporis nondum praeparatae erant. Huc referendae sunt correctiones propter variabilitatem horariam intensitatis magnetismi terrestris, cuius rationem habere oportet adiumento alius acus comparativae ad instar methodi, de qua in art. 10, II. loquuti sumus. Quo tamen valor magnetismi terrestris, quatenus ex *his* experimentis derivari potest, cognoscatur, summam reliquorum experimentorum huc spectantium adiicimus.

Valor fractionis $\frac{\theta}{Tm}$ pro acu prima et filo, a quo pendebat, erutus est per methodum in art. 8 traditam $= \frac{1}{251,96}$. Hinc itaque fit

$$\frac{M}{T} = 0,0436074$$

Huic numero subest metrum tamquam unitas distantiarum. Si pro unitate millimetrum adoptare malumus, iste numerus per cubum millenarii multiplicandus est, ita ut habeatur

$$\frac{M}{T} = 43\,607400$$

Pro acu secunda per experimenta d. 28. Junii instituta iisque prorsus similia, quae pro alia acu in art. 11 tractavimus, prodiit, dum millimetrum, milligramma et minutum secundum temporis solaris medii pro unitatibus accipiebantur,

$$TM = 135\,457900$$

atque hinc, eliminata quantitate M

$$T = 1,7625$$

23.

Quoties experimenta eum in finem instituuntur, ut valor absolutus magnetismi terrestris T determinetur, magni momenti est, curare, ut ipsorum complexus intra modicum tempus absolvatur, ne mutatio sensibilis status magnetici acuum ad illa adhibitarum metuenda sit. Conveniet itaque in observandis deflexionibus acus mobilis solum modum primum art. 20 sequi, adhibitis tantummodo

*) Longitudo acuum in his experimentis adhibitarum est circiter $0^m 3$; si terminum R^{-7} in calculis respicere periclitati essemus, certitudo minuta potius quam aucta fuisset.

duabus distantiis diversis apte electis, siquidem duo seriei termini sufficiunt. E pluribus applicationibus huius methodi hic unam tamquam exemplum eligimus, et quidem eam, cui cura maxime scrupulosa impensa est, distantiis microscopica praecisione mensuratis.

Experimenta instituta sunt 1832 Sept. 18, in duobus apparatibus, quos per literas A, B, tribus acubus, quas per numeros 1, 2, 3 distinguemus. Acus 1, 2 sunt eaedem, quae in art. 11 prima et secunda vocabantur. Experimenta ad duo capita discedunt.

Primo observatae sunt oscillationes simultaneae acus 1 in apparatu A, acusque 2 in apparatu B. Tempus unius oscillationis, ad amplitudinem infinite parvam reductum prodiit

pro acu 1 . . . . . . $15''22450$
pro acu 2 . . . . . . $17,29995$

illud ex 305, hoc ex 264 oscillationibus conclusum.

Dein acus 3 in apparatu A suspensa, acus 1 autem in recta ad meridianum magneticum normali tum versus orientem tum versus occidentem, et utrimque duplici modo collocata, deflexioque acus 3 pro singulis positionibus acus 1 observata est. Haec experimenta, pro duabus distantiis diversis R repetita prodiderunt valores sequentes anguli v perinde intelligendi ut in artt. 19, 21

$$R = 1^m2, \quad v = 3^0 42' \, 19'' \, 4$$
$$R' = 1,6, \quad v' = 1 \;\; 34 \;\; 19,3$$

Inter haec quoque experimenta oscillationes acus 2 in apparatu B observatae sunt: tempori medio respondet valor unius oscillationis infinite parvae ex 414 oscillationibus conclusus $= 17''29484$.

Tempora observabantur ad chronometrum, cuius retardatio diurna $= 14''24$.

Denotantibus M, m momenta magnetismi liberi pro acu 1 et 3, θ constantem torsionis fili in apparatu A, dum acum 1 vel 3 (quarum pondus fere idem est) ferebat, habemus

$$\frac{\theta}{TM} = \frac{1}{597,1}$$

uti in art. 11

$$\frac{\theta}{Tm} = \frac{1}{721,6}$$

quippe acus 3 fortiori magnetismo imbuta erat, quam acus 1.

Momentum inertiae acus 1 per experimenta anteriora iam cognitum erat (vid. art. 11), quae prodiderant $K = 4228\,732400$, millimetro et milligrammate pro unitatibus acceptis.

Variatio thermometri in utroque atrio, ubi apparatus stabiliti sunt, per totum experimentorum tempus tam parva erat, ut superfluum sit eius rationem habere.

Aggrediamur iam calculum horum experimentorum, ut intensitas magnetismi terrestris T inde eruatur. Inaequalitas oscillationum acus 2 levem istius intensitatis variationem manifestat: quo itaque de valore determinato sermo esse possit, reducemus tempus observatum oscillationis acus 1 ad statum medium magnetismi terrestris intra secundam observationum partem. Reductionem aliam requirit hoc tempus propter retardationem chronometri, tertiamque propter torsionem fili. Hoc modo prodit tempus unius oscillationis acus 1 reductum

$$
\begin{aligned}
&= 15{,}22450 \times \tfrac{17{,}29484}{17{,}29995} \cdot \tfrac{86400}{86385{,}70} \cdot \sqrt{\tfrac{598{,}4}{597{,}4}} \\
&= 15''23530 = t
\end{aligned}
$$

Hinc deducitur valor producti $TM = \frac{\pi\pi K}{tt} = 179\,770600$. Parvula differentia inter hunc valorem atque eum, quem supra art. 11 pro die 11. Sept. invenimus, variationi tum magnetismi terrestris tum status magnetici acus tribuenda est.

E deflexionibus observatis obtinemus

$$F = \frac{R'^3 \operatorname{tang} v' - R^3 \operatorname{tang} v}{R'R' - RR} = 113\,056200$$

si millimetrum pro unitate accipimus, atque hinc

$$\frac{M}{T} = \tfrac{1}{2} F\left(1 + \frac{\theta}{Tm}\right) = 56\,606437$$

Comparatio huius numeri cum valore ipsius TM tandem producit

$$T = 1{,}782088$$

tamquam valorem intensitatis vis magneticae terrestris horizontalis die 18. Septembris hora 5.

24.

Experimenta praecedentia facta sunt in observatorio, loco apparatuum ita electo, ut ferrum a vicinia quantum licuit arceretur. Nihilominus dubitari nequit, quin ferri moles, in parietibus, fenestris et ianuis aedificii copiose sparsae, imo etiam partes ferreae instrumentorum astronomicorum maiorum, in quibus per ipsam vim magneticam terrestrem magnetismus elicitur, effectum neutiquam insensibilem in acus suspensas exerceant. Vires hinc oriundae magnetismi terrestris tum directionem tum intensitatem aliquantulum mutant, experimentaque nostra non valorem purum intensitatis magnetismi terrestris, sed valorem pro loco apparatus A modificatum exhibent. Haec modificatio, quamdiu moles ferreae locum non mutant, ipsaque elementa magnetismi terrestris (puta intensitas et directio) non magnopere mutantur, sensibiliter constans manere debet, quae vero ipsius sit quantitas, hactenus quidem ignotum est, attamen vix crediderim, eam ultra unam duasve partes centesimas valoris totalis ascendere. Ceterum haud difficile foret, quantitatem, proxime saltem, per experimenta determinare, observatis oscillationibus simultaneis duarum acuum, quarum altera in observatorio loco sueto, altera subdiu in distantia satis magna ab aedificio aliisve ferri molibus turbantibus suspendenda esset, et quae dein vices suas commutare deberent. Sed hactenus haec experimenta exsequi non vacavit: tutissimum vero remedium afferet aedificium peculiare, observationibus magneticis destinatum, munificentia regia mox exstruendum, a cuius fabrica ferrum omnino excludetur.

25.

Praeter experimenta allata permulta alia similia exsequuti sumus, etsi, tempore anteriori cura multo laxiori. Iuvabit tamen, quae e singulis prodierunt, hic in unum conspectum producere, omissis iis, quae ante apparatus subtiliores stabilitos, per alia rudiora subsidia in acubus diversissimarum dimensionum prodierunt, etiamsi *omnia* approximationem saltem ad veritatem praebuerint. Ecce valores ipsius T per repetita experimenta subinde erutos:

Numerus	Tempus, 1832	T
I	Maii 21	1,7820
II	Maii 24	1,7694
III	Iun. 4	1,7713
IV	Iun. 24—28	1,7625
V	Iul. 23, 24	1,7826
VI	Iul. 25, 26	1,7845
VII	Sept. 9	1,7764
VIII	Sept. 18	1,7821
IX	Sept. 27	1,7965
X	Octobr. 15	1,7860

Experimenta V — IX omnia in eodem loco facta sunt, contra I — IV in locis aliis; experimentum X proprie est mixtum, quum deflexiones loco quidem sueto observatae sint, oscillationes vero alio. Experimentis VII et VIII aequalis fere cura impensa est; contra experimentis IV, V, VI, X paullo minor, experimentisque I — III cura multo laxior. In experimentis I — VIII adhibitae sunt acus diversae quidem, sed eiusdem fere ponderis et longitudinis (pondus erat inter 400 et 440 grammata); contra experimento X inserviit acus, cuius pondus 1062 grammatum, longitudo 485 millimetrorum. Experimentum IX eum tantummodo in finem susceptum est, ut appareret, quemnam praecisionis gradum per acum minusculam attingere liceat: pondus acus adhibitae erat tantummodo 58 grammatum, ceterum cura haud minor, quam in experimentis VII et VIII. Nullum est dubium, subtilitatem observationum notabiliter auctum iri, si acus adhuc graviores, e. g. quarum pondus ad 2000 vel 3000 grammata surgat, in usum vocentur.

26.

Dum intensitas magnetismi terrestris T per *numerum* k exprimitur, huic subest unitas certa V, puta vis cum illa homogenea, cuius nexus cum aliis unitatibus immediate datis in praecedentibus quidem continetur, attamen modo aliquantulum complicatiori: operae itaque pretium erit, hunc nexum hic denuo producere, ut, quam mutationem patiatur numerus k, si loco unitatum fundamentalium ab aliis proficiscamur, elementari claritate ob oculos ponatur.

Ad stabiliendam unitatem V proficisci oportuit ab unitate magnetismi liberi M*) atque unitate distantiae R, statuimusque V aequalem vi ipsius M in distantia R.

Pro unitate M adoptavimus eam quantitatem fluidi magnetici, quae in quantitatem aequalem M in distantia R collocatam agens producit vim motricem (aut si mavis pressionem) aequalem ei W, quae pro unitate accipitur, i. e. aequalem vi, quam exercet vis acceleratrix A pro unitate accepta in massam P pro unitate acceptam.

Ad stabiliendam unitatem A duplex via patet: scilicet vel depromi potest a vi simili immediate data, e. g. a gravitate in loco observationis, vel ab ipsius effectu in corporibus movendis. In modo posteriori, quem in calculis nostris sequuti sumus, duae novae unitates requiruntur, puta unitas temporis S atque unitas celeritatis C, ut pro unitate A accipiatur vis acceleratrix ea, quae per tempus S agens producit velocitatem C: denique pro hac ipsa accipitur ea, quae motui uniformi per spatium R intra tempus S respondet.

Ita patet, unitatem V a tribus unitatibus vel R, P, A vel R, P, S pendere.

Supponamus iam, loco unitatum V, R, M, W, A, P, C, S alias accipi V', R', M', W', A', P', C', S' simili quo priores modo inter se nexas, atque utendo mensura V' magnetismum terrestrem per numerum k' exprimi, qui quomodo se habeat ad k inquirendum est.

Statuendo

$$\begin{aligned} V &= vV' \\ R &= rR' \\ M &= mM' \\ W &= wW' \\ A &= aA' \\ P &= pP' \\ C &= cC' \\ S &= sS' \end{aligned}$$

erunt v, r, m, w, a, p, c, s numeri abstracti, atque

*) Vix necesse erit monere, significationes literis antea tributas hic cessare.

$$kV = k'V' \text{ sive } kv = k'$$
$$v = \frac{m}{rr}$$
$$\frac{mm}{rr} = w = pa$$
$$a = \frac{c}{s}$$
$$c = \frac{r}{s}$$

e quarum aequationum combinatione obtinemus

$$\text{I.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}$$
$$\text{II.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}$$

Quamdiu modum, quem in calculis nostris sequuti sumus, retinemus, formula priori uti oportet; e. g. si loco millimetri et milligrammatis metrum et gramma pro unitatibus accipimus, erit $r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, adeoque $k' = k$; si lineam Parisiensem et libram Berolinensem, habebimus $r = \frac{1}{2,255829}$, $p = \frac{1}{467711,4}$, adeoque $k' = 0,002196161\,k$, unde e. g. experimenta VIII producunt valorem $T = 0,0039131$.

Si modum alterum sequi, atque gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare malumus, statuemus pro observatorio Gottingensi $a = \frac{1}{9811,63}$, unde, quamdiu millimetrum et milligramma retinemus, numeri k per 0,01009554 multiplicandi, mutationesque illarum unitatum secundum formulam II tractandae erunt.

27.

Intensitas vis magneticae terrestris horizontalis T, ut ad absolutam reducatur, per secantem inclinationis multiplicanda est. Hanc Gottingae variabilem esse, nostrisque temporibus diminutionem pati, docuerunt observationes ill. Humboldt, qui mense Decembri 1805 invenit $69^0\,29'$, mense Septembri 1826 autem $68^0\,29'\,26''$. Equidem d. 23. Iunii 1832 adiumento eiusdem inclinatorii, quo olim usus erat b. Mayer, inveni $68^0\,22'\,52''$, quod retardationem diminutionis indicare videtur, attamen huic observationi minorem fidem haberem, tum propter instrumentum minus perfectum, tum quod observatio in observatorio facta a turbatione molium ferrearum non satis tuta est. Ceterum huic quoque elemento plenior cura in posterum dicabitur.

28.

Sequuti sumus in hac commentatione modum vulgo receptum, phaenomena magnetica explicandi, tum quod his complete satisfacit, tum quod per calculos longe simpliciores procedit, quam modus is, ubi magnetismus gyris galvano-electricis circa particulas corporis magnetici adscribitur: talem modum, qui utique pluribus nominibus se commendat, nec affirmare nec reiicere in animo fuit, quod inopportunum fuisset, quum lex actionis mutuae inter elementa talium gyrorum nondum satis explorata videatur. Quicunque vero modus phaenomena tum pure magnetica tum electromagnetica concipiendi in posterum adoptetur, certe respectu illorum cum modo vulgari ubique ad eundem finem perducere debet, et quae hoc ducente in hac commentatione evoluta sunt, forma tantum, non essentia, mutari poterunt.